Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.Ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 17-22 august 2015

Soluţii şi baremuri – Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Este inegalitatea $PA+PB < CA+CB$ adevărată pentru orice triunghi ABC şi orice punct P din interiorul acestuia?

b) Este inegalitatea $PA+PB+PC < DA+DB+DC$ adevărată pentru orice tetraedru $ABCD$ şi orice punct P din interiorul acestuia?

ViitoriOlimpici.ro

Soluţie. a) Inegalitatea este adevărată. Fie $\{Q\} = AP \cap BC$. Folosind inegalitatea triunghiului, avem $PA + PB < PA + (PQ + QB) = AQ + QB < (AC + CQ) + QB = AC + CB$. **3p**

b) Inegalitatea nu este adevărată în orice tetraedru. Se pot descrie numeroase exemple.

1. De exemplu, alegând ABC un triunghi dreptunghic isoscel, cu $m(\angle A) = 90°$ şi $AB = AC = 100$, iar D astfel ca $DA \perp (ABC)$, $DA = 1$, atunci $DA + DB + DC = 1 + 2\sqrt{10001} \approx 201$. Alegând punctul P foarte aproape de B, vom avea $PA + PB + PC \approx BA + BC = 100 + 100\sqrt{2} \approx 241 > 201$.

2. Vom da şi un exemplu riguros: considerăm o piramidă regulată cu baza BCD de latură 3 şi muchie laterală de lungime 100. Atunci $DA + DB + DC = 106$. Fie O centrul bazei. Atunci $BO = \sqrt{3}$. Înălţimea piramidei este $AO = \sqrt{9997} > 99$. Alegem $P \in (AO)$ astfel încât $PO = 99$. Atunci $PB = PC = \sqrt{3 + 99^2} = \sqrt{9804}$, deci $PA + PB + PC = 2\sqrt{9804} + \sqrt{9997} - 99 > 2 \cdot 99 + 99 - 99 = 198 > 106$. **4p**

Problema 2. a) Aflaţi toate numerele prime p ştiind că ecuaţia

$$x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 3xyz = p^2$$

are soluţii numere naturale nenule.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2015

b) Aflaţi toate numerele prime p şi numerele naturale nenule n pentru care ecuaţia

$$x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz = p^n$$

are soluţii numere naturale nenule şi determinaţi numărul acestor soluţii.

Andrei Eckstein

Soluţie. a) Ecuaţia se scrie echivalent $(x + y + z)(xy + yz + zx) = p^2$. **1p**

Cum $xy \geq x \geq 1$, $yz \geq y \geq 1$, $zx \geq z \geq 1$ rezultă că $1 < x + y + z \leq xy + yz + zx$, deci singura posibilitate este $x + y + z = xy + yz + zx = p$. Ori egalitate în inegalitatea $x + y + z \leq xy + yz + zx$ avem numai pentru $x = y = z = 1$, deci $p = 3$ ($x = y = z = 1$ verifică într-adevăr ecuaţia pentru $p = 3$). **1p**

b) Ecuaţia se scrie echivalent $(x + y)(y + z)(z + x) = p^n$. **1p**

Dintre numerele x, y, z există măcar două de aceeaşi paritate, deci suma lor este pară, prin urmare $(x+y)(y+z)(z+x)$ este par. Rezultă că p este par. Fiind prim, rezultă $p = 2$. **1p**

Membrul stâng find cel puţin $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 2^3$, pentru $n \in \{1, 2\}$ ecuaţia nu are soluţii, iar pentru $n = 3$ avem soluţia unică $x = y = z = 1$.

Pentru $n \geq 4$, trebuie ca $x+y=2^a$, $y+z=2^b$, $z+x=2^c$, cu $a,b,c \in \mathbb{N}^*$, $a+b+c=n$. Atunci $2(x+y+z)=(x+y)+(y+z)+(z+x)=2^a+2^b+2^c$, de unde $x+y+z=\dfrac{2^a+2^b+2^c}{2}$, deci $x=(x+y+z)-(y+z)=\dfrac{2^a+2^c-2^b}{2}$, $y=\dfrac{2^a+2^b-2^c}{2}$, $z=\dfrac{2^b+2^c-2^a}{2}$. **1p**

Pentru ca $x,y,z \in \mathbb{N}^*$ trebuie ca $2^a, 2^b, 2^c$ să fie lungimi de laturi de triunghi, adică cele mai mari două dintre numerele a,b,c să fie egale.

Dacă $n=6k$, $k \in \mathbb{N}^*$, (a,b,c) poate fi $(2k,2k,2k)$, $(2k-2,2k+1,2k+1)$, $(2k-4,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(2,3k-1,3k-1)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $1+3(k-1)=3k-2$ soluţii.

Dacă $n=6k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k-1,2k+1,2k+1)$, $(2k-3,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(1,3k,3k)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k$ soluţii.

Dacă $n=6k+2$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k,2k+1,2k+1)$, $(2k-2,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(2,3k,3k)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k$ soluţii.

Dacă $n=6k+3$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k+1,2k+1,2k+1)$, $(2k-1,2k+2,2k+2)$, $\ldots$, $(1,3k+1,3k+1)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k+1$ soluţii.

Dacă $n=6k+4$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k,2k+2,2k+2)$, $(2k-2,2k+3,2k+3)$, $\ldots$, $(2,3k+1,3k+1)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k$ soluţii.

Dacă $n=6k+5$, $k \in \mathbb{N}$, atunci (a,b,c) poate fi $(2k+1,2k+2,2k+2)$, $(2k-1,2k+3,2k+3)$, $\ldots$, $(1,3k+2,3k+2)$ sau permutări ale acestora, deci ecuaţia are $3k+3$ soluţii.

În concluzie, ecuaţia are soluţii naturale nenule dacă şi numai dacă $p=2$ şi $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2,4\}$. **2p**

Problema 3. a) Daţi exemplu de o mulţime formată din 10 numere naturale care are proprietatea că, oricum am alege şase elemente distincte ale ei, suma acestora nu este divizibilă cu 6.

b) Demonstraţi că orice mulţime formată din 11 numere naturale are cel puţin o submulţime cu şase elemente a căror sumă este divizibilă cu 6.

Soluţie. a) De exemplu orice mulţime formată cu cinci numere divizibile cu 6 şi cinci numere care dau restul 1 la împărţirea cu 6, în particular $\{0,1,6,7,12,13,18,19,24,25\}$. **3p**

b) Fie $M=\{x_1,x_2,\ldots,x_{11}\} \subset \mathbb{N}$. Din orice trei numere naturale putem alege două astfel ca suma lor să fie un număr par. Alegem 3 numere din mulţimea M. Vom putea forma o pereche cu suma pară. Rămân 9 numere. Alegem trei. Extragem două cu suma pară. Continuăm procedeul până când obţinem 5 perechi disjuncte de elemente din M cu suma în fiecare pereche un număr par.

Din orice cinci numere putem alege trei cu suma divizibilă cu 3. Într-adevăr, dacă avem trei numere care dau un acelaşi rest la înmpărţirea la 3, le alegem pe acelea, iar dacă nu, atunci trebuie să avem cel puţin câte un număr care dă rest 0, 1 respectiv 2 la împărţirea cu 3 şi alegem câte unul de fiecare fel. Procedând astfel cu cele 5 sume obţinute anterior, obţinem 3 sume a căror sumă este divizibilă cu 6, adică obţinem 6 elemente cu suma divizibilă cu 6.

.... **4p**