PUTERI

ABSTRACT. În articolul de faţă sunt prezentate proprietăţile puterilor şi modul de aflare a cifrei unităţilor unei puteri

Lecţia se adresează clasei a V-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Să ne amintim ce înseamnă să ridicăm un număr natural a la o putere n, număr natural.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{de\ n-ori}$$

Pornind de la această definiţie putem formula următoarele proprietăţi ale puterilor:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m} \qquad (n > m)$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Compararea puterilor

Există două situaţii "fericite" în care putem compara două puteri: atunci când au aceeaşi bază şi atunci când au acelaşi exponent.

1. Când două puteri au aceeaşi bază, este mai mare puterea cu exponentul mai mare.

$$n > m \Leftrightarrow a^n > a^m$$

2. Când două puteri au acelaşi exponent, este mai mare puterea care are baza mai mare.

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$$

În cazul în care nu ne aflăm în niciuna din situaţiile de mai sus încercăm, pe baza proprietăţilor, să ajungem la una din cele două situaţii "fericite".

Exerciţiu 1. Comparaţi 2^{105} şi 3^{75}.

Soluţie: Este evident că nu putem ajunge la aceeaşi bază. Vom încerca să ajungem la acelaşi exponent. Observăm că $105 = 7 \cdot 15$, iar $75 = 5 \cdot 15$.

Avem

$$2^{105} = 2^{7 \cdot 15} = (2^7)^{15} = 128^{15}$$

şi

$$3^{75} = 3^{5 \cdot 15} = (3^5)^{15} = 243^{15}$$

Cum $128 < 243$ rezultă $128^{15} < 243^{15}$, de unde $2^{105} < 3^{75}$.

Exerciţiul 2. Comparaţi 3^{91} cu 9^{45}.

Soluţie: Deoarece

$$9 = 3^2$$

putem scrie

$$9^{45} = \left(3^2\right)^{45} = 3^{90}$$

Cum

$$91 > 90$$

rezultă

$$3^{91} > 3^{90}$$

adică

$$3^{91} > 9^{45}$$

Exerciţiu 3. Comparaţi 3^{55} cu 5^{36}.

Soluţie: De această dată nu se poate ajunge nici la aceeaşi bază nici la acelaşi exponent. Într-o asemenea situaţie ne folosim de o putere intermediară.

În cazul nostru este evident că

$$3^{55} > 3^{54} \qquad (1)$$

Vom arăta acum că

$$3^{54} > 5^{36}$$

Avem

$$3^{54} = 3^{3 \cdot 18} = (3^3)^{18} = 27^{18}$$

şi

$$5^{36} = 5^{2 \cdot 18} = (5^2)^{18} = 25^{18}$$

Cum

$$27^{18} > 25^{18}$$

rezultă

$$3^{54} > 5^{36} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$3^{55} > 5^{36}$$

Ultima cifră a unei puteri

Sunt mai multe situaţii în care ridicarea la putere este incomod de efectuat, dar este suficient să cunoaştem ultima cifră a numărului pe care l-am putea obţine prin ridicare la putere. Să ne gândim la divizibilitatea cu 2, 5 sau 10 care presupune să cunosc numai ultima cifră a numărului. În acest caz, pentru a vedea dacă 5 este un divizor pentru $14^{2011} + 1$ avem nevoie numai de cifra unităţilor lui $14^{2011} + 1$.

Ne mai putem gândi şi la un pătrat perfect a cărui ultimă cifră nu poate fi 2, 3, 7 sau 8. De exemplu, pentru a arăta că $2^{2011} + 5$ nu este pătrat perfect este suficient să arătăm că ultima cifră a lui $2^{2011} + 5$ este 2, 3, 7 sau 8.

Cred că sunt suficiente argumentele pentru a justifica necesitatea aflării ultimei cifre a unei puteri.

Vom nota cu $u(n)$ ultima cifră a numărului n.

Observaţia 1. Ultima cifră a unui număr n^p (n număr natural şi p număr natural nenul) este aceeaşi cu ultima cifră a cifrei unităţilor lui n ridicată la puterea p.

Exemplu: $u(574^p) = u(4^p)$.

Observaţia 2. $u(a \cdot b) = u\left(u(a) \cdot u(b)\right)$ şi $u(a + b) = u\left(u(a) + u(b)\right)$.

Exemplu: $u(274 \cdot 379) = u(4 \cdot 9) = 6$ sau $u(274 + 379) = u(4 + 9) = 3$

În baza observaţiei 1 este suficient să cunoaştem $u(1^n)$; $u(2^n)$; $u(3^n)$; $u(4^n)$; $u(5^n)$; $u(6^n)$; $u(7^n)$; $u(8^n)$; $u(9^n)$; $u(0^n)$, unde n este număr natural nenul.

Pentru $u(1^n)$ şi $u(0^n)$ lucrurile sunt clare

$$u(1^n) = 1 \text{ şi } u(0^n) = 0$$

La fel de simplu stau lucrurile şi în cazul $u(5^n)$ sau $u(6^n)$

Obsevăm că $u(5^1) = 5$; $u(5^2) = 5$; $u(5^3) = 5$ de unde deducem că

$$u(5^n) = 5$$

Pentru $u(6^n)$, din $u(6^1) = 6$; $u(6^2) = 6$; $u(6^3) = 6$ deducem

$$u(6^n) = 6$$

Ne ocupăm acum de 2^n.
Avem $u(2^1) = 2;\ u(2^2) = 4;\ u(2^3) = 8;\ u(2^4) = 6$.
Deoarece $u(2^4) = 6$ şi $u(6^n) = 6$ putem gândi astfel:
Număr n este de forma $n = 4 \cdot k + r$, unde r poate fi 0, 1, 2 sau 3.
Atunci $u(2^n) = u(2^{4\cdot k+r}) = u(2^{4\cdot k} \cdot 2^r) = u\left((2^4)^k \cdot 2^r\right) = u(16^k \cdot 2^r) = u(6^k \cdot 2^r) = u(6 \cdot 2^r)$

Aşadar,

$$u(2^n) = u(2^{4k+r}) = u(6 \cdot 2^r)$$

unde r poate fi 0, 1, 2 sau 3.

Exemplu: $u(2^{2011}) = u(2^{4\cdot 502+3}) = u(6 \cdot 2^3) = 8$

Pentru $u(3^n)$; $u(7^n)$respectiv $u(8^n)$ avem reguli asemănătoare deoarece $u(3^4) = 1;\ u(7^4) = 1$ şi $u(8^4) = 6$.

Aşadar,

$$u(3^n) = u(3^{4k+r}) = u(1 \cdot 3^r) = u(3^r)$$
$$u(7^n) = u(7^{4k+r}) = u(1 \cdot 7^r) = u(7^r)$$
$$u(8^n) = u(8^{4k+r}) = u(6 \cdot 8^r)$$

unde r poate fi 0, 1, 2 sau 3.

Ne ocupăm acum de 4^n
Avem $u(4^1) = 4$ şi $u(4^2) = 6$. Deoarece $u(4^2) = 6$ putem gândi astfel:
Numărul n este de forma $n = 2 \cdot k + r$, unde r poate fi 0 sau 1.
Atunci $u(4^n) = u(4^{2\cdot k+r}) = u(4^{2\cdot k} \cdot 2^r) = u\left((4^2)^k \cdot 4^r\right) = u(16^k \cdot 4^r = u(6 \cdot 4^r)$

Aşadar,

$$u(4^n) = u(4^{2k+r}) = u(6 \cdot 4^r)$$

unde r poate fi 0 sau 1.

Pentru 9^n, deoarece $u(9^2) = 1$ avem o regulă asemănătoare.

$$u(9^n) = u(9^{2k+r}) = u(9^r)$$

unde r poate fi 0 sau 1.

Exerciţiu 4. Aflaţi ultima cifră a numărului $a = 2^{2010} + 3^{2011} + 4^{2012}$.

Soluţie: Avem

$$u(2^{2010}) = u(2^{4\cdot 502+2}) = u(6\cdot 2^2) = 4$$

$$u(3^{2011}) = u(3^{4\cdot 502+3}) = u(3^3) = 7$$

$$u(4^{2012}) = u(4^{2\cdot 1006}) = u(6\cdot 4^0) = 6$$

şi atunci

$$u(a) = u(4+7+6) = 7$$

Exerciţiu 5. Arătaţi că numărul $107^{103}+103^{107}$ are ca divizor pe 10.

Soluţie: Un număr are ca divizor pe 10 dacă ultima sa cifră este 0. Aşadar, trebuie să aflăm ultima cifră a numărului.

Avem

$$u(107^{103}) = u(7^{103}) = u(7^{4\cdot 25+3}) = u(7^3) = 3$$

şi

$$u(103^{107}) = u(3^{107}) = u(3^{4\cdot 26+3}) = u(3^3) = 7$$

De aici

$$u(107^{103}+103^{107}) = u(3+7) = 0$$

ceea ce arată că numărul $107^{103}+103^{107}$ are ca divizor pe 10.

Alte probleme cu puteri

Problema 1. Arătaţi că pentru orice număr natural n, numărul

$$A = 2^{2n+4}\cdot 9^n + 2^{2n}\cdot 9^{n+1}$$

este pătrat perfect.

Soluţie: Folosind proprietăţile puterilor expuse mai sus şi factorul comun avem

$A = 2^{2n}\cdot 2^4\cdot 9^n + 2^{2n}\cdot 9^n\cdot 9 = 2^{2n}\cdot 9^n\cdot \left(2^4+9\right) = 2^{2n}\cdot 9^n\cdot 25 = (2^n)^2\cdot \left(3^2\right)^n\cdot 5^2 = (2^n\cdot 3^n\cdot 5)^2$

ceea ce arată că A este pătrat perfect.

Problema 2. Arătaţi că numărul

$$a = 63^n + 7^{n+1}\cdot 3^{2n+1} - 21^n\cdot 3^{n+2}$$

este multiplu de 13.

Soluţie: Putem scrie

$a = \left(3^2\cdot 7\right)^n + 7^n\cdot 7\cdot 3^{2n}\cdot 3 - (3\cdot 7)^n\cdot 3^n\cdot 3^2 = 3^{2n}\cdot 7^n + 7^n\cdot 3^{2n}\cdot 21 - 3^{2n}\cdot 7^n\cdot 9 = 3^{2n}\cdot 7^n\cdot (1+21-9) = 3^{2n}\cdot 7^n\cdot 13.$

Deoarece a conţine factorul 13 este evident că el este multiplu de 13.

Problema 3. Care număr este mai mare $a = 3^{454} - 3^{453} - 3^{452}$ sau $b = 5^{340}$?

Olimpiadă Vâlcea

Soluţie: Pe a îl putem scrie

$$a = 3^{452} \cdot \left(3^2 - 3 - 1\right) = 3^{452} \cdot 5$$

şi atunci trebuie comparat $3^{452} \cdot 5$ cu 5^{340} sau 3^{452} cu 5^{339}.

Putem scrie

$$3^{452} = 3^{4 \cdot 113} = \left(3^4\right)^{113} = 81^{113}$$

şi

$$5^{339} = 5^{3 \cdot 113} = \left(5^3\right)^{113} = 125^{113}$$

Acum, având acelaşi exponent, cum

$$81 < 125$$

rezultă

$$81^{113} < 125^{113}$$

adică b este mai mare decât a.

Problema 4. Scrieţi în ordine crescătoare numerele: 4^{14}; 5^{12}; 7^{11}; 11^7.

Olimpiadă Galaţi

Soluţie: Avem

$$4^{14} = \left(2^2\right)^{14} = 2^{28} = \left(2^7\right)^4 = 128^4 \quad (1)$$

şi

$$5^{12} = \left(5^3\right)^4 = 125^4 \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$4^{14} > 5^{12} \qquad (*)$$

Din

$$125^4 > 121^4$$

$$121^4 = \left(11^2\right)^4 = 11^8$$

şi

$$11^8 > 11^7$$

obţinem

$$5^{12} > 11^7 \qquad (**)$$

Acum

$$7^{11} = 7^9 \cdot 7^2 = \left(7^3\right)^3 \cdot 7^2 = 343^3 \cdot 49$$

Dar

$$343^3 \cdot 49 > 256^3 \cdot 16$$

şi

$$256^3 \cdot 16 = \left(2^8\right)^3 \cdot 2^4 = 2^{24} \cdot 2^4 = 2^{28} = 4^{14}$$

Din cele de mai sus deducem că

$$7^{11} > 4^{14} \qquad (***)$$

Din (*), (**) şi (***) rezultă următoarea ordine crescătoare:

$$11^7;\ 5^{12};\ 4^{14};\ 7^{11}$$