

PĂTRATE PERFECTE

ABSTRACT. Materialul se adresează în principal elevilor din clasele a V-a și a VI-a și reprezintă o colecție de definiții, proprietăți, exemple, metode, exerciții de transfer, ce au în comun noțiunea de pătrat perfect.

Lecția se adresează claselor a V-a și a VI-a

Autor: Gabriel Vrînceanu

Definiție 1. Un număr natural se numește pătrat perfect dacă se poate scrie ca puterea a doua a unui număr natural.

Exemple 1. Numărul 9 este pătrat perfect deoarece se poate scrie 3^2 .

Numărul 256 este pătrat perfect deoarece se poate scrie 16^2 .

Exemplele pot continua; luăm orice număr natural n , calculăm n^2 și astfel găsim un pătrat perfect.

Procedeul de mai sus prin care găsim pătrate perfecte ne permite să stabilim care este cifra unităților oricărui pătrat perfect. Putem construi următorul tablou

$u(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

în care am notat $u(n)$ cifra unităților lui "n" și $u(n^2)$ cifra unităților lui "n²".

Comentariu. Tabloul de mai sus ne arată că numai anumite cifre pot reprezenta cifra unităților unui pătrat perfect. Dar atenție, dacă cifra unităților unui număr este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9 nu înseamnă că acesta este sigur pătrat perfect.

Exemple 2. Numărul 16 este pătrat perfect ($4^2 = 16$), dar 26 nu este pătrat perfect, deși are cifra unităților tot 6.

Tot din tabloul de mai sus deducem și un alt fapt, de data aceasta cu siguranță adevărat și anume:

Teorema 1. *Un număr care are cifra unităților 2, 3, 7 sau 8 nu este pătrat perfect.*

Exercițiu 1. Arătați că numărele $a = 5n + 2$ și $b = 5n + 3$ nu sunt pătrate perfecte.

Soluție. Notăm $u(x)$ cifra unităților lui x .

Avem $u(5n)$ este 0 sau 5, de unde $u(5n+2)$ este 2 sau 7 și în baza teoremei 1 rezultă că a nu este pătrat perfect.

La fel $u(5n+3)$ este 3 sau 8 și deci nici b nu este pătrat perfect.

Comentariu. Din acest exercițiu ar trebui reținut că un pătrat perfect nu poate fi de forma $5n+2$ sau $5n+3$.

Definiție 2. Numerele n^2 și $(n+1)^2$ se numesc pătrate perfecte consecutive.

Cu această definiție putem formula

Teorema 2. *Între două pătrate perfecte consecutive nu există niciun alt pătrat perfect.*

Consecință. Dacă numărul natural a are proprietatea că există n natural astfel încât $n^2 < a < (n+1)^2$, atunci a nu este pătrat perfect.

Exercițiu 2. Fie n un număr natural nenul. Arătați că $n(n+1)$ nu este pătrat perfect.

Soluție. Este evident că

$$n < n+1 \quad (*)$$

Înmulțim relația (*) cu n și obținem

$$n^2 < n(n+1) \quad (**)$$

Înmulțim acum relația (*) cu $n+1$ și obținem

$$n(n+1) < (n+1)^2 \quad (***)$$

Din (**) și (***) rezultă

$$n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$$

Deoarece $n(n+1)$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, în baza teoremei 2, rezultă că nu este pătrat perfect.

Comentariu. Să reținem că produsul a două numere naturale nenule consecutive nu este pătrat perfect.

Acum, întorcându-ne la definiția pătratului perfect este evidentă următoarea

Teorema 3. *Orice putere cu exponent par este un pătrat perfect.*

Justificare. Fie puterea a^{2n} , adică o putere cu exponent par. Din proprietățile puterilor putem scrie

$$a^{2n} = (a^n)^2$$

ceea ce arată că a^{2n} este pătrat perfect.

Comentariu. Atenție! Dacă avem o putere cu exponent impar nu este sigur că aceasta nu este pătrat perfect.

De exemplu

$$49^3 = (7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = (7^3)^2$$

așadar este pătrat perfect.

În legătură cu pătratele perfecte este util să reținem următoarele rezultate:

Propoziția 1. Produsul a două pătrate perfecte este un pătrat perfect.

Justificare. Fie a^2 și b^2 cele două pătrate perfecte.

Avem

$$a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$$

ceea ce justifică afirmația din enunț.

Propoziția 2. Suma a două pătrate perfecte poate să fie sau poate să nu fie pătrat perfect.

Justificare. Vom da două exemple.

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

adică suma a două pătrate perfecte este pătrat perfect.

$$4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$$

care arată că suma a două pătrate perfecte nu mai este pătrat perfect.

Propoziția 3. Un număr prim nu este pătrat perfect.

Justificare. Să presupunem că numărul prim p este pătrat perfect. Atunci există un număr natural n astfel încât $p = n^2$ sau $p = n \cdot n$. Din ultima relație deducem că n este un divizor al lui p . Dar p era număr prim (are ca divizori numai pe 1 și pe el însuși). Înseamnă că presupunerea făcută este falsă. În concluzie, numerele prime nu sunt pătrate perfecte.

Propoziția 4. Un număr natural descompus în factori primi este pătrat perfect dacă toți factorii au exponenți pari.

Justificare. Fie $A = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$ (descompunerea în factori primi a lui A). Cum numerele prime nu sunt pătrate perfecte nu vom putea să ne aflăm în situația descrisă în **Comentariu** de la teorema 3. Așadar, pentru ca A să fie pătrat perfect trebuie să avem toți exponenții numere pare (vezi Teorema 3).

Consecință. Dacă un număr prim p divide un pătrat perfect A , atunci p^2 îl divide pe A .

Comentariu. Consecința de mai sus ne ajută să demonstrăm că un număr nu este pătrat perfect.

Exercițiul 3. Arătați că $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20$ nu este pătrat perfect.

Soluție. În produsul din enunț apare factorul 19, deci n se divide cu 19. Dacă n ar fi pătrat perfect ar trebui să se dividă cu 19^2 , dar acesta nu apare în produsul care dă numărul n . În concluzie n nu este pătrat perfect.

Propoziția 5. Un pătrat perfect are un număr impar de divizori naturali.

Justificare. Dacă $A = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, atunci numărul divizorilor naturali ai lui A este $(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$.

Dacă A este pătrat perfect, atunci numerele $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ sunt numere pare (vezi propoziția 4). Rezultă de aici că fiecare paranteză din produsul $(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) \cdot \dots \cdot (n_k + 1)$ este un număr impar, așadar tot produsul este par. În concluzie, numărul divizorilor lui A este impar.

Consecință. Dacă un număr natural are un număr par de divizori, atunci el nu este pătrat perfect.

Se mai pot spune multe lucruri legate de pătratele perfecte, dar acestea depășesc nivelul clasei a VI-a. Ne vom opri aici, nu înainte de a prezenta, fără justificări, câteva rezultate utile în problemele cu pătrate perfecte.

Propoziția 6. Nu există pătrate perfecte de forma $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

Propoziția 7. Nu există pătrate perfecte de forma $4k + 2$ sau $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$.