Concursul Gazeta Matematică şi Viitori Olimpici.ro

Ediţia a IX-a, 15.08.2018

Clasa a X-a

Enunţuri şi bareme

Problema 1.

a) *Fie numerele complexe* $z = \cos x + i \sin x$ *şi* $w = \cos y + i \sin y$, *unde* $x, y \in [0, 2\pi]$. *Demonstraţi că*

$$\frac{z-w}{z+w} = i \operatorname{tg} \frac{x-y}{2}.$$

b) *Fie* $z_1, z_2, ..., z_{2018} \in \mathbb{C}$ *distincte şi având module egale. Demonstraţi că există* $k, l \in \{1, 2, 3, ..., 2018\}$, $k \neq l$, *astfel încât*

$$\left| \frac{z_k - z_l}{z_k + z_l} \right| \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{2018}.$$

Gazeta Matematică

Soluţie şi barem. **a)** Verificare prin calcul direct. **2p**

b) Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $z_m = r(\cos x_m + i \sin x_m)$, pentru orice $m \in \{1, 2, 3, ..., 2018\}$, şi $0 \leq x_1 < x_2 < ... < x < 2\pi$. Conform punctului precedent, avem

$$\left| \frac{z_{m+1} - z_m}{z_{m+1} + z_m} \right| = \operatorname{tg} \frac{x_{m+1} - x_m}{2},$$

pentru orice $m \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}$. **1p**

Dacă există $m \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}$ astfel încât $\frac{x_{m+1} - x_m}{2} \leq \frac{\pi}{2018}$, atunci problema este rezolvată. În caz contrar avem $\frac{x_{m+1} - x_m}{2} > \frac{\pi}{2018}$, pentru orice $m \in \{1, 2, 3, ..., 2017\}$. Adunăm cele 2017 relaţii şi obţinem $\frac{x_{2018} - x_1}{2} > \frac{2017\pi}{2018} = \pi - \frac{\pi}{2018}$. Atunci $\frac{\pi}{2018} > \pi - \frac{x_{2018} - x_1}{2}$, de unde

$$\left| \operatorname{tg} \frac{x_{2018} - x_1}{2} \right| < \operatorname{tg} \frac{\pi}{2018},$$

ceea ce încheie demonstraţia. **4p**

□

Problema 2. *Fie mulţimea*

$$\mathcal{M} = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0 \right\}$$

şi funcţia

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y.$$

Determinaţi

a) $\min f$;

b) $\max f$.

Viitori Olimpici.ro

Soluţie şi barem. Din $x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0$ obţinem $x^2 + (y-1)^2 \leqslant 1$, adică $\mathcal{M}$ reprezintă un disc de centru $B(0, 1)$ şi rază 1. .... **1p**

Apoi $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 10y = (x-3)^2 + (y-5)^2 - 34$. **1p**

Dacă notăm $M(x, y)$, unde $(x, y) \in \mathcal{M}$ şi $A(3, 5)$, avem $f(x, y) = MA^2 - 34$. **1p**

a) Cum $MA \geq AB - BM = 5 - 1 = 4$, deducem că $\min f = -18$ şi se obţine când $M \in (AB) \cap \mathcal{C}(B, 1)$. **2p**

b) Apoi $MA \leqslant MB+AB = MB+5 \leqslant 6$. Obţinem că $\max f = 2$ şi această valoarea maximă se obţine când A, B, M sunt coliniare în această ordine, adică M este punctul de intersecţie al cercului $\mathcal{C}(B,1)$ cu dreapta AB astfel încât $B \in (AM)$ **2p**

$\square$

Problema 3. *Pentru orice mulţime finită nevidă X, considerăm* $B_X = \{\ f : X \to X \,|\, f \text{ bijectivă}\}$. *Pentru orice element $f \in B_X$, notăm* $\operatorname{ord} f$ *ca fiind cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care* $\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k\, ori\ f} = 1_X$. *Fie* $Fix\,(f) = \{c \in X \,|\, f\,(c) = c\}$.

Demonstraţi că, oricare ar fi $f, g \in B_X$ cu proprietatea $f \circ g = g \circ f$ şi $(\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g) = 1$, *avem* $Fix\,(f \circ g) = Fix\,(f) \cap Fix\,(g)$. *Mai rămâne valabilă egalitatea precedentă dacă* $(\operatorname{ord} f, \operatorname{ord} g) = 2$?

Nicolae Bourbăcuţ

Soluţie şi barem. Pentru simplitatea redactării vom nota $f \circ g = fg$ şi $\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k\, ori\ f} = f^k$.

Fie $\operatorname{ord}\, f = n$ şi $\operatorname{ord}\, g = p$. Pentru $c \in Fix\,(f) \cap Fix\,(g)$ avem $f\,(c) = g\,(c) = c$ şi atunci $f\,(g\,(c)) = c$ deci $c \in Fix\,(f \circ g)$. **1p**

Reciproc, notăm $h = fg = gf$. Fie $c \in Fix\,(h)$. Dacă $(n, m) = d$, există $s, t \in \mathbb{N}$ astfel încât $ns - pt = d$. **1p**

Atunci $f^n\,(c) = c \Rightarrow f^{ns}\,(c) = c \Rightarrow f^{pt+d}\,(c) = c$. Dar $g^p\,(c) = c$, deci $g^{pt}\,(c) = c \Rightarrow f^{pt+d}\,(g^{pt}\,(c)) = c \Rightarrow f^d\,(f^{pt}\,(g^{pt}\,(c))) = c \Rightarrow f^d\,(h^{pt}\,(c)) = c \Rightarrow f^d\,(c) = c$. Analog obţinem şi $g^d\,(c) = c$. **3p**

Pentru $d = 1$ obţinem $c \in Fix\,(f)$ şi $c \in Fix(g)$ de unde $Fix\,(f \circ g) \subset Fix\,(f) \cap Fix\,(g)$ ceea ce conduce la egalitatea din enunţ. **1p**

Pentru $d = 2$ obţinem $f^2\,(c) = c$, ceea ce nu implică $c \in Fix\,(f)$. Prin urmare egalitatea nu este neapărat satisfăcută. **1p**

$\square$