Concursul Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15 august 2018

Clasa a VII-a

Problema 1. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Se consideră $2n$ bile. Pe fiecare din aceste bile este scris câte un număr. Presupunem că, oricum am grupa aceste $2n$ bile în n perechi, există două perechi care au aceeaşi sumă.
(a) Arătaţi că pe patru dintre bile este scris acelaşi număr.
(b) Arătaţi că pe bile sunt scrise cel mult $n-1$ numere distincte.

ViitoriOlimpici.ro

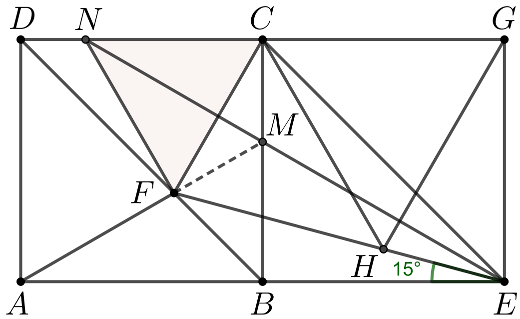
Soluţie:
(a) Dacă pe bile sunt scrise numerele $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{2n}$, formăm perechile $\{a_1, a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$, $\ldots$, $\{a_{2n-1}, a_{2n}\}$. Evident, avem $a_1 + a_2 \leq a_3 + a_4 \leq \ldots \leq a_{2n-1} + a_{2n}$. Cum printre sume există două egale, vor exista şi două consecutive egale, $a_{2j-1} + a_{2j} = a_{2j+1} + a_{2j+2}$. Dar cum $a_{2j-1} \leq a_{2j} \leq a_{2j+1} \leq a_{2j+2}$, rezultă că trebuie să avem egalitate peste tot, adică $a_{2j-1} = a_{2j} = a_{2j+1} = a_{2j+2}$.
(b) Presupunem că ar exista n valori distincte $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ scrise pe bile. Aranjăm şi celelalte numere (egale sau nu cu celelalte n) în ordine crescătoare: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$. Formând grupele $\{b_1, c_1\}$, $\{b_2, c_2\}$, $\ldots$, $\{b_n, c_n\}$, obţinem sumele distincte $b_1 + c_1 < b_2 + c_2 < \ldots < b_n + c_n$, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar putem avea cel mult $n-1$ valori distincte.

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat. Fie E simetricul lui A faţă de B. Pe diagonala BD se consideră punctul F astfel încât $m(\angle AEF) = 15°$. Bisectoarea $\angle FEC$ intersectează BC în M şi CD în N. Arătaţi că:
a) punctele A, F, M sunt coliniare;
b) triunghiul CNF este echilateral.

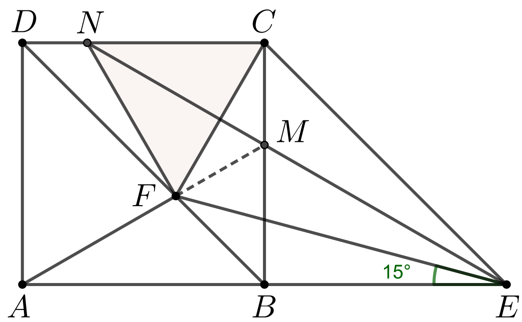
Adrian Bud

Soluţia 1: (*Mircea Fianu*)
a) Construim pătratul $CBEG$, iar în interiorul acestuia triunghiul echilateral CGH. Triunghiul GHE este isoscel cu unghiul la vârf de $30°$, deci $m(\angle GEH) = 75°$. Rezultă că H se află pe dreapta EF. De asemenea, $m(\angle CHE) = 135° = m(\angle EBF)$, $m(\angle HCE) = 15° = m(\angle BEF)$ şi $CH = CG = BE$, deci triunghiurile EHC şi FBE sunt congruente (ULU). Deducem că triunghiul CEF este isoscel, deci $m(\angle FCE) = 75°$, iar $m(\angle FCM) = 30°$. Pe de altă parte, $\Delta\, BFA \equiv \Delta\, BFC$

(LUL), deci $m(\angle FAB) = 30°$. M se află pe mediatoarea segmentului $[AE]$, deci triunghiul MAE este isoscel. Rezultă că $m(\angle MAE) = m(\angle MEA) = 30° = m(\angle FAE)$, deci $F \in AM$.
b) Punctul N se află pe mediatoarea segmentului $[CF]$, deci triunghiul NCF este isoscel cu unghiul $\angle NCF$ de 60°, prin urmare este echilateral.



Soluţia 2: (*Mircea Fianu*)
a) $(EF$ este bisectoarea unghiului $\angle MEB$, iar $(BF$ este bisectoare exterioară în triunghiul EBM, deci F este centrul cercului exînscris triunghiului MBE tangent laturii $[BM]$. Atunci şi $(MF$ este bisectoare exterioară şi, cum $m(\angle BME) = 60°$, rezultă că $m(\angle NMF) = m(\angle FMB) = 60°$. Pe de altă parte, din $\Delta\, MAB \equiv \Delta\, MEB$ rezultă $m(\angle AMB) = m(\angle EMB) = 60°$, deci $\angle AMB \equiv \angle EMB$. Deci $F \in AM$.
b) Avem: $m(\angle FCM) = m(\angle FAB) = 30°$, deci $m(\angle FCE) = 75°$. Rezultă că $EM \perp CF$, deci dreapta MN este mediatoarea segmentului $[FC]$. Rezultă că triunghiul NCF este isoscel cu unghiul $\angle NCF$ de 60°, prin urmare este echilateral.



Problema 3. Determinaţi cea mai mică constantă $c > 0$ pentru care avem proprietatea:
pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ este adevărată inegalitatea

$$|\sqrt{m^2+1} - \sqrt{n^2+1}| \leq c|m-n|.$$

Soluţie: Arătăm că $c = 1$ satisface proprietatea din enun't.
Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $m \geq n$. Atunci $\sqrt{m^2+1} \geq \sqrt{n^2+1}$, deci inegalitatea din enunţ revine la $\sqrt{m^2+1} - \sqrt{n^2+1} \leq m-n$. Ea este evident adevărată pentru $m = n$. Pentru $m > n$ ea se scrie $\dfrac{m^2-n^2}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}} \leq m-n$, adică $m+n \leq \sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}$ ceea ce este evident adevărat.
Presupunând că afirmaţia este adevărată pentru un $c < 1$, scriind condiţia pentru $m = 0$ şi n arbitrar, ar trebui să avem $\sqrt{n^2+1} \leq cn+1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, adică $n^2+1 \leq c^2n^2+2cn+1$. Din această ultimă relaţie rezultă $n(1-c^2) \leq 2c$ şi, împărţind cu $1-c^2 > 0$, obţinem că $n \leq \dfrac{2c}{1-c^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce contrazice faptul că există numere naturale oricât de mari.