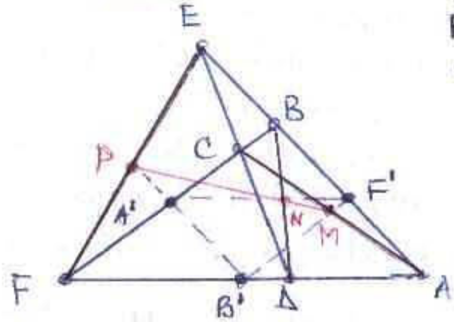
Puncte coliniare. Drepte remarcabile.

MÎRŞANU ALEXANDRU-GABRIEL

1. Dreapta Newton-Gauss.

Într-un patrulater complet, mijloacele celor trei diagonale sunt coliniare (se află pe o dreaptă numită dr. N-G,

Soluție



Definiția patrulaterului complet

Fie ABCD un patrulater convex și $AB \cap CD = \{E\}$, iar $AD \cap BC = \{F\}$.

ABCDEF se numește patrulater complet:

- laturile: AE, AF, DE, BF;

(2 câte 2 neparalele; oricare 3 nu sunt concurente)

- vârfurile: $A = AE \cap AF$
  $B = FB \cap AE$
  $C = DE \cap BF$
  $D = ED \cap AF$
  $E = AE \cap ED$
  $F = FB \cap FA$
- diagonalele: AC, BD, EF
- perechi de vârfuri opuse: (A,C), (B,D), (E,F).

Soluția propriu-zisă

În ΔBAF considerăm mijloacele laturilor: B', A', F'. De aici $\Rightarrow$

$\Rightarrow M \in B'F'$, $N \in A'F'$ și $P \in A'B'$.

Avem: M, N, P coliniare $\Leftrightarrow$ MNP transv. în $\Delta B'A'F' \Leftrightarrow$ (Menelaus) cu

$$\frac{MB'}{MF'} \cdot \frac{NF'}{NA'} \cdot \frac{PA'}{PB'} = 1 \quad (*).$$

Din:

$$\left.\begin{array}{l} B'F' \parallel BF \Rightarrow \dfrac{MB'}{MF'} = \dfrac{CF}{CB} \\ A'F' \parallel AF \Rightarrow \dfrac{NF'}{NA'} = \dfrac{DA}{DF} \\ PB' \parallel EA \Rightarrow \dfrac{PA'}{PB'} = \dfrac{EB}{EA} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MB'}{MF'} \cdot \frac{NF'}{NA'} \cdot \frac{PA'}{PB'} = \frac{CF}{CB} \cdot \frac{DA}{DF} \cdot \frac{EB}{EA} = \text{(Menelaus în } \Delta BAF \text{ cu transv. } ECD) = 1 \Rightarrow$$

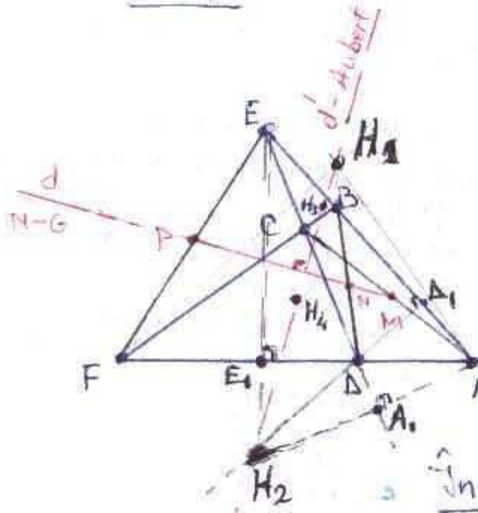
$\Rightarrow$ (Reciproca Menelaus în $\Delta B'A'F'$ cu punctele M, N, P pe laturi) că

M, N, P coliniare: MNP = dreapta Newton-Gauss.

2. Dreapta lui Aubert.

Teorema lui Aubert. Ortocentrele celor patru triunghiuri formate cu laturile unui patrulater complet se găsesc pe o aceeași dreaptă, numită dreapta lui Aubert.

Soluție



OBS. Vom aplica puterea unui punct față de un cerc și axa radicală a două cercuri (*)

Fie H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABF, $A\Delta E$, CBE, $C\Delta F$. Fie (M), (N), (P) cercurile ce au ca diametre diagonalele (AC), $(B\Delta)$, (EF) ale patr. complet.

Notăm cu d – dreapta Newton–Gauss.

În $\Delta A\Delta E$, H_2 este ortocentrul, iar A_1, Δ_1, E_1 sunt proiecțiile vârfurilor pe laturi:

Conform (*) $\Rightarrow H_2A \cdot H_2A_1 = H_2\Delta \cdot H_2\Delta_1 = H_2E \cdot H_2E_1$ (1)

Dar $A_1 \in (M)$, $\Delta_1 \in (N)$ și $E_1 \in (P)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ că punctul H_2 are puteri egale (*) față de cercurile (M), (N) și (P)

Din $H_2A \cdot H_2A_1 = H_2\Delta \cdot H_2\Delta_1 \Rightarrow H_2 \in$ axei radicale a cercurilor (M) și (N) $\stackrel{not}{=} d_{MN}$ și $d_{MN} \perp d$ $(= MN)$ (3)

Din $H_2\Delta \cdot H_2\Delta_1 = H_2E \cdot H_2E_1 \Rightarrow H_2 \in$ axei radicale a cercurilor (N) și (P) $\stackrel{not}{=} d_{NP}$ și $d_{NP} \perp d$ $(= MN)$ (4)

Cum din H_2 se poate duce o singură perpend. pe $d \Rightarrow$ (3) și (4) că cele două axe radicale coincid: $d_{MN} = d_{NP}$ (5) $\stackrel{not}{=} d'$

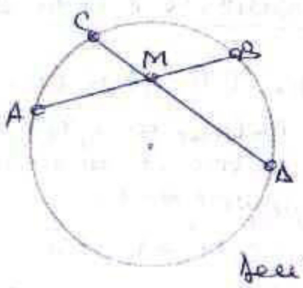
Deci, am arătat că $H_2 \in d'$.

Analog se arată că ortocentrele triunghiurilor ABF, CBE și $C\Delta F$ se află pe dreapta d'.

Dreapta d', pe care se află cele patru ortocentre se numește dreapta lui Aubert și este $\perp$ pe dreapta Newton-Gauss

1) Puterea unui punct față de un cerc.

1. Fie $\mathcal{C}(O,r)$ și $M \in Int\,\mathcal{C}(O,r)$. Atunci, pentru orice coardă (AB) care conține punctul M, produsul $MA \cdot MB = const.$

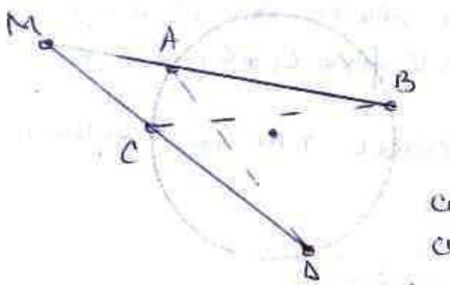


Soluție: Fie $[AB]$ și (CD) coarde prin $M \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta MAC \sim \Delta MDB \Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$

Valoarea constantă a acestui produs, înmulțită cu (-1) se notează cu $\rho(M)$ și se numește puterea pct M, interior cercului, față de cerc.

Deci $\rho(M_{int}) = -MA \cdot MB$.

2. Fie $\mathcal{C}(O,r)$ și $M \in Ext\,\mathcal{C}(O,r)$. Atunci pentru orice secantă AB, $A, B \in \mathcal{C}(O,r)$ care conține punctul M, produsul $MA \cdot MB = const.$



Soluție: Fie secantele AB și CD care trec prin $M \Rightarrow$
$\Delta MAD \sim \Delta MCB \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \cdot MB = MC \cdot MD$

Valoarea constantă a acestui produs se notează cu $\rho(M)$ și se numește puterea punctului M, exterior cercului, față de cerc.

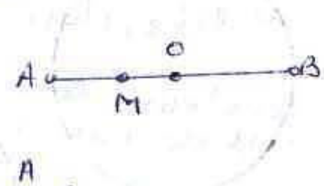
Deci $\rho(M_{ext}) = MA \cdot MB$.

Expresia puterii unui punct față de un cerc

Fie $\mathcal{C}(O,r)$, M un punct din planul cercului și $d \overset{not}{=} OM$.

1. $M \in Int\,\mathcal{C}(O,r)$ și fie (AB) diametrul prin M

Atunci $\rho(M_{int}) = -MA \cdot MB = -(r-d)(r+d) =$
$= d^2 - r^2$



2. $M \in Ext\,\mathcal{C}(O,r)$ și (AB) diametrul a.î. $A \in (MB)$.

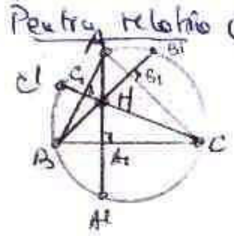
Atunci $\rho(M_{ext}) = MA \cdot MB =$
$= (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$

Obs. Dacă $M \in \mathcal{C}(O,r)$, atunci, în mod convențional, $\rho(M) = 0$.

Prin urmare, oricare ar fi M din planul cercului $\mathcal{C}(O,r)$ avem:

$$\rho(M) = d^2 - r^2$$

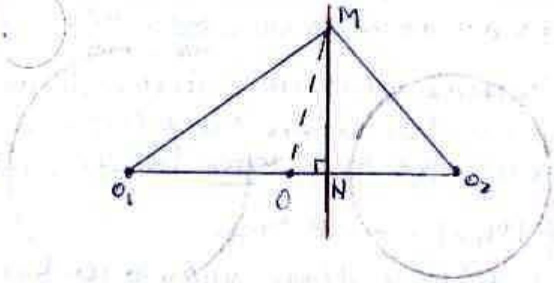
Obs. Pentru relația (1) din dreapta lui Aubert



H ortocentrul $\Delta ABC \Rightarrow$
(1) $HA_1 = A_1A'$; $HB_1 = B_1B'$; $HC_1 = C_1C'$
(2) cf. puterii pct H față de cercul circumscris $\Rightarrow$
$\Rightarrow HA \cdot 2HA_1 = HB \cdot 2HB_1 = HC \cdot 2HC_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow HA \cdot HA_1 = HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$.

Axa radicală a două cercuri

Locul geometric al punctelor care au aceeași putere față de două cercuri neconcentrice este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor, numită axa radicală a celor două cercuri date.



Fie $\mathcal{C}(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}(O_2, r_2)$ cu $O_1 \neq O_2$. Trebuie să aflăm locul geometric al punctelor M cu proprietatea:

$$O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2 \quad (1)$$

Pp. $r_1 > r_2$ și notăm $r_1^2 - r_2^2 = k^2$

Atunci (1) este $\Leftrightarrow$ cu $O_1M^2 - O_2M^2 = k^2$ (2), adică trebuie găsit locul geometric al punctelor pentru care diferența pătratelor distanțelor la două puncte fixe O_1 și O_2 este o constantă (egală cu k^2):

Fie O mijl. $[O_1O_2]$ și $MN \perp O_1O_2$. Aplicăm T.P.G. în triunghiurile:

$\triangle MOO_1$: $O_1M^2 = OM^2 + OO_1^2 + 2OO_1 \cdot ON$

$\triangle MOO_2$: $O_2M^2 = OM^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot ON$ (−)

$$O_1M^2 - O_2M^2 = 4OO_1 \cdot ON = 2O_1O_2 \cdot ON = k^2 \Rightarrow ON = \frac{k^2}{2O_1O_2} = \text{const}$$

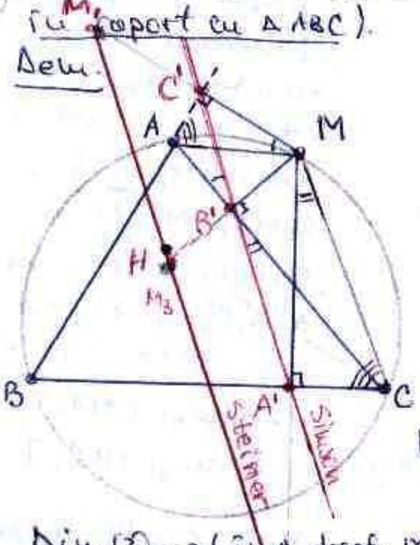
$\Rightarrow$ N este un punct fix pe O_1O_2, la distanța constantă de pct. fix O. Prin urmare, locul geometric este perpend. pe O_1O_2, dusă prin punctul fix N.

În concluzie, locul geom. al punctelor care au aceeași putere față de două cercuri este axa radicală ($\perp$ pe linia centrelor).

Dreapta lui Simson.

Teorema lui Simson. Proiecțiile ortogonale ale unui punct M de pe cercul circumscris triunghiului ABC pe laturile acestuia sunt coliniare (dreapta lui Simson a pct. M în raport cu ΔABC).

Dem.



Fie A', B', C' proiecțiile ortogonale ale lui M pe lat. ΔABC.

A', B', C' sunt coliniare $\Leftrightarrow$ (teorema reciprocă a $\measuredangle$ opuse la vârf) $\widehat{AB'C'} \equiv \widehat{CB'A'}$

Patrulaterul $AB'MC'$ inscriptibil $\Rightarrow$ $\widehat{AB'C'} \equiv \widehat{AMC'}$ (1)

Patrulaterul $CA'B'M$ inscriptibil $\Rightarrow$ $\widehat{CB'A'} \equiv \widehat{CMA'}$ (2)

Patrulaterul $ABCM$ inscriptibil $\Rightarrow$ $\widehat{BCM} \equiv \widehat{MAC'}$ (3)

Din (3) $\Rightarrow$ (în Δ drept. $MC'A$ și $MA'C$) $\widehat{AMC'} \equiv \widehat{CMA'}$ (4)

Din (1), (2) și (4) $\Rightarrow$ $\widehat{AB'C'} \equiv \widehat{CB'A'} \Leftrightarrow A', B', C'$ se află pe o dreaptă, numită dreapta lui Simson a punctului M în raport cu triunghiul ABC.

4. Dreapta lui Steiner

Simetricele M_1, M_2, M_3 ale punctului M față de dreptele suport ale laturilor ΔABC, AB, BC, resp. AC se află pe o dreaptă, numită dreapta lui Steiner a pct. M în raport cu ΔABC.

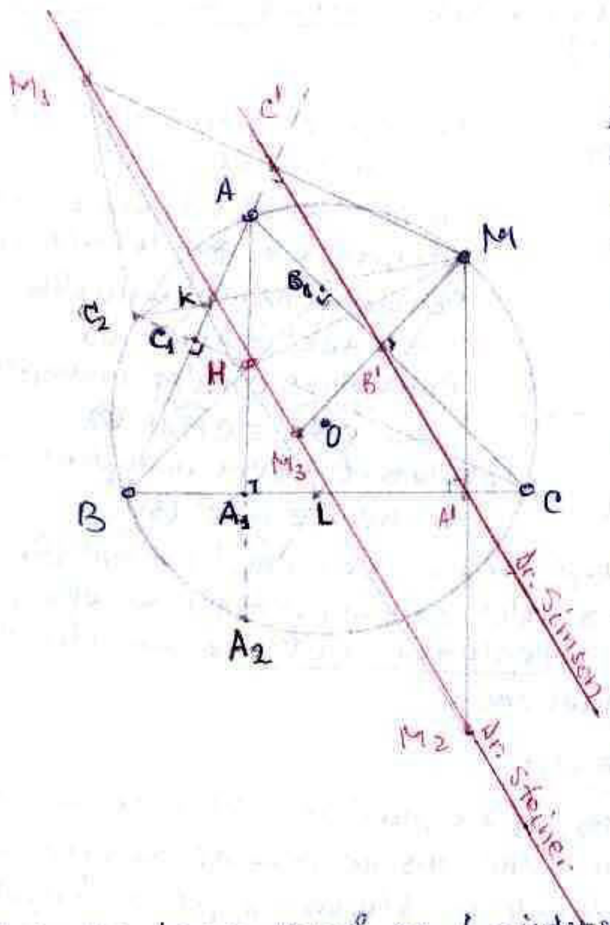
Dreapta lui Steiner trece și prin ortocentrul H al ΔABC.

Dem. $B'C'$ l.m. în $\Delta MM_1M_3 \Rightarrow M_1M_3 \parallel B'C'$ (1)
$A'C'$ l.m. în $\Delta MM_1M_2 \Rightarrow M_1M_2 \parallel A'C'$ (2)
A', B', C' coliniare: dr. lui Simson
$\Rightarrow M_1, M_2, M_3$ coliniare $\in$ dr. lui Steiner

Pe pagina următoare demonstrăm că: dreapta lui Steiner trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC.

Dreapta lui Steiner, a punctului M în raport cu $\triangle ABC$ trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC

Soluție



Notăm:

(O) – cercul circum. $\triangle ABC$

AH intersectează (O) în A_2

CH — " — (O) în C_2

$A_2M \cap HM_2 = \{L\}$, $L \in A_1C$

$C_2M \cap HM_1 = \{K\}$, $K \in AC_1$

A_1, B_1, C_1 picioarele înălțimilor

A', B', C' proiecțiile ortogonale ale lui M pe laturile $\triangle$.

$\Rightarrow A_1$ mijl. $[HA_2]$

C_1 mijl. $[HC_2]$

Vom arăta că punctele K, L și H sunt coliniare, de unde va rezulta că $H \in$ dreapta lui Steiner.

HA_2M_2M trapez isoscel cu L = intersecția diagonalelor

HC_2M_1M trapez isoscel cu K = intersecția diagonalelor

Punctele A și K se află pe mediatoarea segm. $[HC_2]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{KHA} \equiv \widehat{AC_2K} \equiv \widehat{AC_2M} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$

$\triangle LHA_2$: LA_1 mediat. segm. $[HA_2] \Rightarrow \widehat{LHA_2} \equiv \widehat{HA_2L} \equiv \widehat{AA_2M} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$

$\Rightarrow \widehat{KHA} \equiv \widehat{LHA_2} \Rightarrow$ punctele K, H și L sunt coliniare

dar, H, L, M_2 coliniare și

H, L, M_1 coliniare $\Rightarrow$

$\Rightarrow M_1, H, M_2$ coliniare, adică $H \in$ dreapta lui Steiner.

Obs. Din dem. $\Rightarrow AC_1 \cap MC_2 \cap HM_1 = \{K\}$ și

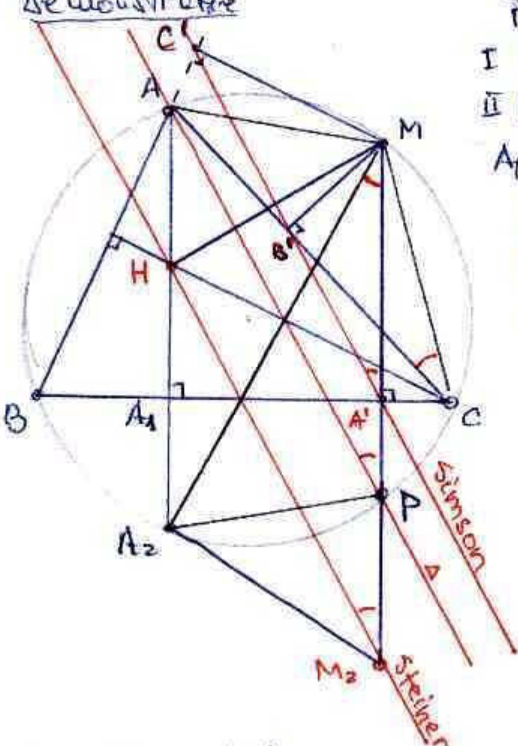
$A_2M \cap HM_2 \cap A_1C = \{L\}$.

Dăm o altă soluție pentru a arăta că dreapta lui Steiner trece prin ortocentrul ΔABC.

<u>Teorema lui Steiner</u>

Dreapta lui Simson a unui punct oarecare M, de pe cercul circumscris ΔABC, trece prin mijlocul segmentului $[MH]$. (Prin urmare $H \in$ dreptei lui Steiner).

<u>Demonstrație</u>



Parcurgem două etape:

I Dem. că dr. $\Delta = AP \parallel$ dr. lui Simson

II Dem. că dr. $\Delta = AP \parallel HM_2$

Apoi, cum A' este mijlocul lui $[MM_2]$, folosind I și II, va rezulta concluzia

<u>Dem. I.</u>

$\widehat{APA'} \equiv \widehat{APM} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$

$B'A'CM$ inscriptibil $\Rightarrow \widehat{B'A'M} \equiv \widehat{B'CM} \equiv$

$\equiv \widehat{ACM} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$

De aici $\Rightarrow \widehat{APA'} \equiv \widehat{C'A'M} \Rightarrow$ <u>$\Delta \parallel$ dr. Simson</u>

<u>Dem. II.</u>

HA_2M_2M trapez isoscel $\Rightarrow$

$\widehat{HM_2M} \equiv \widehat{A_2MM_2} \equiv \widehat{A_2MP} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_2P}$

$= \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM} = \widehat{APM} \Rightarrow \widehat{HM_2P} \equiv \widehat{APM}$

$\Rightarrow \Delta \parallel$ dr. Steiner HM_2

Să recapitulăm:

1. Dreapta lui Simson este $\parallel$ cu dreapta lui Steiner
2. Dreapta lui Simson este linie mijlocie în ΔMM_1M_2
3. Dreapta lui Simson trece prin mijlocul segm. $[MH]$ (Teorema lui Steiner)
4. Dreapta lui Steiner trece prin ortocentrul H al ΔABC