COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2013 ETAPA NAŢIONALĂ, SIGHIŞOARA (CLASELE A V-A ŞI A VI-A)

Abstract. Comments on some of the problems presented at the Final Round of the National Mathematics Olympiad for grades V and VI, 2013, Sighişoara.

Data: 7 aprilie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Naţionale a Olimpiadei de Matematică pentru clasele a V-a şi a VI-a, Sighişoara 2013, sunt, din nou, după cum v-am obişnuit, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

2. Clasa a V-a

Subiectul (1)**.** *Un număr natural de patru cifre diferite două câte două, având forma* $\overline{abcd}$*, se numeşte* ***interesant*** *dacă* $a \cdot d + b \cdot c = 33$*. Arătaţi că suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de* 11*.*

Soluţie. Dat fiind că, pentru patru cifre distincte a, b, c, d pentru care avem $ad + bc =$ constant, există opt numere interesante, în care fiecare dintre cifre apare de câte două ori pe fiecare poziţie, rezultă că suma lor este $2(a+b+c+d)(10^3+10^2+10+1) = 2 \cdot 11 \cdot 101(a+b+c+d)$, multiplu de 11. Prin urmare, suma tuturor numerelor interesante este multiplu de 11, şi aceasta **oricare ar fi valoarea constantei** $ad + bc$.

Un moment! Aceasta presupune că niciuna dintre cifre nu este 0, căci atunci două dintre cele opt numere considerate mai sus **nu ar fi numere naturale de patru cifre**, iar suma celor şase rămase nu ar mai fi un multiplu de 11. De-abia aici intervine valoarea $33 = 3 \cdot 11$, căci aceasta face să nu existe numere naturale interesante de patru cifre având una din cifre 0.

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse şi la efectele dorite, discuţii care au condus la materialul de faţă.

[1] Consultaţi subiectele, soluţiile oficiale şi rezultatele la `http://ssmr.ro/onm2013`

Din păcate, această observaţie esenţială lipseşte din soluţia oficială, şi după cum se vede este instrumentală. Mi se pare "unfair" folosirea unei valori particulare, care în plus este şi multiplu de 11, când de fapt orice valoare a constantei duce la acelaşi rezultat (este suficient să se postuleze cifrele ca fiind nenule); bănuiesc o maliţiozitate neavenită. □

Subiectul (2)**.** *Considerăm o descompunere a tablei de şah 8×8 în p dreptunghiuri care nu se suprapun, astfel încât fiecare dreptunghi să conţină un număr întreg de pătrăţele, dintre care jumătate să fie albe, şi să nu existe două dreptunghiuri având acelaşi număr de pătrăţele. Determinaţi valoarea maximă a lui p.*

Soluţie. Dreptunghiurile conţin fiecare un număr par de pătrăţele; deoarece avem $2+4+6+8+10+12+14+16 = 72 > 64 = 8 \cdot 8$ (suma celor mai mici opt numere pare nenule distincte), rezultă că $p < 8$. Pentru $p = 7$ găsim o partiţie cu dreptunghiuri 2×1, 2×7, 2×2, 2×6, 2×3, 2×5 şi 2×8.

No comment. □

Subiectul (3)**.** *Fie a, b, c, d, x, y, z, t cifre astfel încât $0 < a < b \leq c < d$ şi*

$$\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}.$$

Determinaţi toate valorile posibile ale sumei $S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}$.

Soluţie. Avem $S = 1001(x+t) + 110(y+z)$. Dar $\overline{xyzt} = \overline{dcba} - \overline{abcd} = 1000(d-a)+100(c-b)-10(c-b)-(d-a)$, unde $2 \leq d-a \leq 8$ şi $0 \leq c-b \leq 6$. Pentru $b = c$ rezultă $x+t = 9$ şi $z = t = 9$, deci $S = 9009 + 1980 = 10989$. Pentru $b < c$ rezultă $x + t = 10$ şi $z + t = 8$, deci $S = 10010 + 880 = 10890$.

Mă întreb care este scopul unei astfel de probleme – insipidă, irelevantă, accidentală, şi care nu verifică nicio cunoştinţă specifică. □

Subiectul (4)**.** *Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul elevilor aflaţi încă pe traseu. Bianca a ajuns la cabană a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puţini elevi decât cei ajunşi înaintea ei la cabană. Câţi elevi sunt în acea clasă?*

Soluţie. Când Andrei ajunge la cabană, acolo se află deja a elevi, cu $2a$ rămaşi încă pe traseu. Când Bianca ajunge la cabană, acolo se află deja $2b$ elevi, cu b rămaşi încă pe traseu. Din condiţiile problemei $2b = a + 10$, şi cum avem evident $3a = 3b = N - 1$, unde N este numărul elevilor din clasă, rezultă $a = b$, deci $b = 10$, aşadar $N = 1 + 3b = 31$.

Soluţia oficială conduce la calcule o ţâră mai complicate, dar oricum este o problemă mult prea uşoară pentru poziţia ultimă din proba clasei a V-a. □

3. Clasa a VI-a

Subiectul (1)**.** *Ana, Barbu, Carmen şi Dan au de rezolvat* 60 *de probleme. Ana a rezolvat* 45 *dintre ele, Barbu a rezolvat* 48*, Carmen a rezolvat* 44*, iar Dan a rezolvat* 47 *de probleme. Arătaţi că probabilitatea ca o problemă din cele* 60 *să fie rezolvată de toţi cei patru este cel puţin egală cu* $1/15$*.*

Soluţie. Soluţia oficială pune degetul direct pe rană, lucrând cu problemele care **nu au fost rezolvate**. Cei patru copii nu au rezolvat 15, 12, 16 respectiv 13 probleme; în total cel mult (căci pot fi suprapuneri între problemele nerezolvate de elevi diferiţi) $15 + 12 + 16 + 13 = 56$ de probleme. Înseamnă că cel puţin $60 - 56 = 4$ probleme au fost rezolvate de toată lumea, şi atunci probabilitatea cerută este de cel puţin $4/60 = 1/15$.

Direct şi la obiect; o problemă uşoară, dar nu e nimic rău cu asta. Este instructiv să prezentăm şi soluţia complementară, care foloseşte identitatea dată de Principiul Includerii şi Excluderii

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Atunci (notaţiile sunt evidente)

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq 45 + 48 - 60 = 33,$$

$$|(A \cap B) \cap C| = |A \cap B| + |C| - |(A \cap B) \cup C| \geq 33 + 44 - 60 = 17,$$

$$|(A \cap B \cap C) \cap D| = |A \cap B \cap C| + |D| - |(A \cap B \cap C) \cup D| \geq 17 + 47 - 60 = 4.$$

Rezultă $|A \cap B \cap C \cap D| \geq 4$, cu aceeaşi concluzie. □

Subiectul (2)**.** *Un dreptunghi este împărţit în* 49×101 *pătrate egale. În pătratul din stânga jos se află o monedă. Doi copii imaginează următorul joc – pe rând, fiecare dintre ei mută moneda din locul în care se află pe un pătrat oarecare situat la dreapta, pe aceeaşi linie sau pe un pătrat oarecare situat deasupra, pe aceeaşi coloană. Câştigă jucătorul care plasează moneda în pătratul din dreapta sus.*

Arătaţi că primul jucător poate câştiga, oricum ar juca cel de-al doilea.

Soluţie. În fine, o problemă simpatică, de strategie. Să lucrăm cu un dreptunghi de dimensiuni $m \times n$, cu liniile numerotate de jos în sus, iar coloanele sunt numerotate de la stânga la dreapta. Atunci pătratul din stânga jos este identificat prin perechea de coordonate $(1, 1)$, pătratul din dreapta sus este identificat prin perechea de coordonate (m, n), iar orice alt pătrat este identificat printr-o pereche de coordonate (i, j), cu $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Deoarece jocul nu se poate termina indecis (în cel mult $m + n - 2$ mutări cineva câştigă), unul dintre jucători **trebuie** să aibă o strategie câştigătoare. Un pătrat este o poziţie perdantă dacă jucătorul care este la mutare, cu moneda în acel pătrat, pierde orice ar face. Din enunţ rezultă că (m, n) este perdant. Dar orice poziţie $(m - k, n - k)$ este şi ea perdantă, căci orice mutare, cu ℓ linii mai sus sau ℓ coloane mai la dreapta, poate fi contrabalansată printr-o mutare corespunzătoare, către poziţia $(m - k + \ell, n - k + \ell)$.

Orice altă poziţie (i, j) este câştigătoare, căci există o mutare (unică) către o poziţie perdantă, de tipul $(m-k, n-k)$.

Rezultă că primul jucător are o strategie câştigătoare pentru $m \neq n$, iar al doilea jucător are o strategie câştigătoare pentru $m = n$. În cazul nostru, primul jucător câştigă. $\square$

Subiectul (3)**.** *Se consideră numerele prime $p < q < r$ şi numărul natural nenul $a < p$. Numărul n este cel mai mic număr natural nenul care împărţit la p, q şi r dă, de fiecare dată, restul cu a mai mic decât împărţitorul.*

(i) Determinaţi, în funcţie de p, q, r şi a, numărul n.
(ii) Dacă $n = 1000$, determinaţi valorile posibile ale lui a.

Soluţie.
(i) Pentru $\pi \in \{p, q, r\}$ avem deci $n = \alpha\pi + \beta$, cu $\beta = \pi - a$, aşadar $n + a = \pi(\alpha + 1)$, de unde $\pi \mid n + a$. Deoarece numerele prime p, q, r sunt distincte, rezultă $pqr \mid n + a$, deci $n \geq pqr - a$, şi evident numărul n cel mai mic va fi $\boxed{n = pqr - a}$.
(ii) Acum, $10^3 = 1000 = n = pqr - a > p^3 - p > (p-1)^3$, de unde $p < 11$, aşadar $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. Deoarece $a < p$, rezultă $1 \leq a \leq 6$. Pentru $a = 1$ avem $pqr = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, deci soluţia $\boxed{(p, q, r, a) = (7, 11, 13, 1)}$.

Soluţia oficială se leneveşte acum, şi acordă 1 punct pentru "Justificarea faptului că celelalte cazuri nu sunt posibile", de parcă ar fi mare scofală. Evident nu putem avea a par, căci atunci $2 \mid 1000 + a = pqr$, ceea ce forţează $p = 2 \leq a$, imposibil. Nu putem avea nici $a = 5$, căci atunci $3 \mid 1000 + 5 = pqr$, ceea ce forţează $p = 3 < 5 = a$, imposibil. În fine, nu putem avea nici $a = 3$, căci atunci $1000 + 3 = 17 \cdot 59 = pqr$ este iarăşi imposibil. Punctul b) este lipsit de mari merite, căci nu aduce decât o plicticoasă trecere în revistă a puţine cazuri posibile. $\square$

Subiectul (4)**.** *Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$, $\angle BAC = 90°$. Fie $D \in BC$ astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează dreapta AD în punctul I. Demonstraţi că $BA + AI = BC$.*

Soluţie. Soluţia oficială face construcţia auxiliară a punctului M pe latura BC, pentru care $BA = BM$; atunci triunghiul ABM este isoscel în B, iar triunghiurile ABI şi CAM rezultă congruente, deci $BA + AI = BM + MC = BC$. Dar nu degeaba punctul I a fost numit astfel – el este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, căci AD este şi bisectoare. Atunci, notând cateta $\triangle ABC$ cu ℓ, avem $BC = \ell\sqrt{2}$ şi $AD = \ell\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultă $\ell^2 = 2[ABC] = \ell(2 + \sqrt{2})ID$, deci $ID = \ell\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}$, şi deci $AI = AD - ID = \ell(\sqrt{2} - 1)$, de unde finalmente $BA + AI = \ell + \ell(\sqrt{2} - 1) = \ell\sqrt{2} = BC$. $\square$

4. Încheiere

Site-ul oficial `http://colegiulunirea.ro/onm56ms/`, important şi el – pentru comunicarea între lumea concursului şi cea "exterioară" – totuşi fiind secundar conţinutului matematic, a fost relativ lent, problemele şi soluţiile apărând cu întârziere, iar rezultatele cu şi mai mare întârziere.

Problemele au suferit în general de boala prevalentă a lipsei de miez şi conţinut de idei. Poate sunt eu prea neîngăduitor, şi necunoscător al conţinutului programei şcolare pentru aceste clase mici, dar sunt sigur că se pot întreba lucruri mai apropiate de spiritul matematic decât travaliul steril, asupra unor situaţii artificiale, din care nu rămânem cu mai nimic. Iată, salut din nou Subiectul 2 de la clasa a VI-a, proaspăt şi ieşit din făgaşul bătătorit al rutinei.

Unii dintre voi nici nu au participat; vă urez succes şi o calificare strălucită în anii care vor veni. Unii au avut un concurs de proastă calitate – nu vă descurajaţi! norocul se poate întoarce. Unii au obţinut rezultatele pentru care au muncit şi pe care le-au dorit – felicitările mele cele mai sincere!