PRINCIPIUL CUTIEI

ABSTRACT. În articolul de faţă este prezentat pricipiul cutiei şi sunt rezolvate câteva probleme cu ajutorul acestui principiu.

Lecţia se adresează clasa a IV-a

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Acest principiu este mai mult o observaţie de bun simţ care, de-a lungul timpului s-a dovedit foarte utilă în rezolvarea unor probleme.

Se pare că pentru prima oară a fost utilizat de către matematicianul german Dirichlet. Din acest motiv i se mai spune şi principiul lui Dirichlet.

Dar care este acest principiu?

Mai întâi un mic exemplu.

Dacă aveţi trei mere pe care trebuie să le puneţi în două coşuri, atunci va trebui ca într-un coş să puneţi două mere.

Despre aceasta este vorba; dacă am mai multe obiecte de aşezat în mai puţine cutii, atunci într-o cutie trebuie să aşez mai multe obiecte.

Iată însă cum se enunţă acest principiu la modul general:

Dacă avem un număr N de cutii şi un număr $N+1$ de obiecte, atunci cel puţin într-o cutie vor fi două obiecte.

Să numerotăm cutiile cu

$$C_1, C_2, C_3, ..., C_N$$

şi obiectele cu

$$O_1, O_2, O_3, ..., O_N, O_{N+1}.$$

Să presupunem că în cutia C_1 se află obiectul O_1, în cutia C_2 obiectul O_2 şi aşa mai departe, în cutia C_N se află obiectul O_N. În acest fel am terminat cutiile, dar ne-a mai rămas un obiect. Ce facem cu el? Îl introducem într-o cutie unde se mai află deja un obiect. Aşadar, într-o cutie se vor afla două obiecte.

Prezentăm acum câteva exemple. Începem cu o problemă foarte simplă, dar utilă pentru a înţelege mecanismul după care funcţionează principiul cutiei.

Problema 1: Dacă întrebăm la întâmplare 367 de persoane care este ziua lor de naştere vom găsi cel puţin două persoane născute în aceeaşi zi.

Soluţie: În această problemă "cutiile" sunt zilele anului. Înseamnă că avem 365 sau 366 de "cutii". Obiectele sunt cele 367 de persoane. Se observă că avem mai multe obiecte decât cutii, atunci, conform principiului cutiei, vom avea cel puţin o cutie cu două obiecte. Aşadar, vor fi cel puţin două persoane născute în aceeaşi zi.

Problema 2: Din trei numere naturale luate la întâmplare, cel puţin două au aceeaşi paritate.

Soluţie: Numerele naturale pot fi pare sau impare. Acestea sunt cutiile; o cutie pentru numere pare şi o cutie pentru numere impare. Obiectele sunt cele trei numere. Aşadar avem două cutii şi trei obiecte. Conform principiului cutiei, într-o cutie sunt cel puţin două obiecte. În concluzie, cel puţin două numere au aceeaşi paritate.

Problema 3: La o lucrare de matematică , cei 25 de elevi ai unei clase au luat note de la 5 la 10, inclusiv. Arătaţi că există cel puţin 5 elevi care au luat aceeaşi notă.

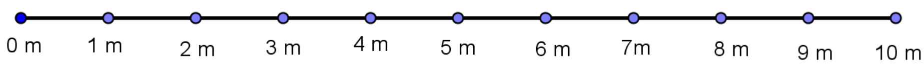
Soluţie: Elevii puteau obţine notele: 5, 6, 7, 8, 9 sau 10. Acestea vor fi cutiile; în total 6 cutii. Obiectele sunt reprezentate de cei 25 de elevi. Dacă în fiecare cutie vom pune câte 4 obiecte înseamnă că am folosit

$$6 \times 4 = 24 \quad (obiecte)$$

Dar erau 25 de elevi (adică de obiecte), aşadar într-o cutie vor fi 5 obiecte (elevi). În concluzie, cel puţin 5 elevi au obţinut aceeaşi notă.

Problema 4: Într-un şir format din 11 persoane, aşezate una în spatele celeilalte, distanţa dintre prima şi ultima persoană este de 10 metri. Arătaţi că există cel puţin 2 persoane care se află la distanţă de 1 metru sau mai puţin de 1 metru una de cealaltă.

Soluţie: În figura de mai jos am reprezentat coloana marcând distanţa din metru în metru. Pe această linie trebuie să aşezăm cele 11 persoane.



În punctele **0 m** şi **10 m** trebuie să aşezăm câte o persoană (distanţa dintre prima şi ultima persoană este de 10 metri). Au rămas de aşezat 9 persoane.

Dacă o persoană ar fi aşezată în segmentul dintre **0 m** şi **1 m** sau în segmentul dintre **9 m** şi **10 m**, atunci problema ar fi rezolvată; am avea două persoane situate la mai puţin de 1 metru una de cealaltă.

Să presupunem că toate cele 9 persoane rămase sunt aşezate în segmentul dintre **1 m** şi **9 m**.

"Cutiile" vor fi toate segmentele cu lungimea de 1 metru. Vom avea astfel 8 "cutii" în care trebuie să aşezăm 9 "obiecte" (persoanele rămase).

Cum numărul "obiectelor" este mai mare decât numărul "cutiilor", conform principiului cutiei, în cel puţin o "cutie" vor fi două "obiecte".

Asta înseamnă că vom avea cel puţin două persoane la distanţă de 1 metru (dacă sunt aşezate în punctele care marchează distanţa din metru în metru) sau mai puţin de 1 metru (dacă nu sunt aşezate în punctele care marchează distanţa din metru în metru).

Problema 5: Într-o carieră de piatră sunt 50 de blocuri de piatră. Cel mai uşoar cântăreşte 370 kg, următorul cânăreşte 372 kg şi aşa mai departe, fiecare cântăreşte cu 2 kg mai mult decât cel dinaintea lui. Aceste blocuri de piatră sunt transportate cu 7 camioane care pot încărca fiecare câte 3000 kg.

Putem transporta toate cele 50 de blocurile de piatră într-un singur transport?

Soluţie: Dacă aflăm cât cântăresc toate cele 50 de blocuri de piatră (20950 kg) şi împărţim la 7 (numărul camioanelor) obţinem mai puţin de 3000 (cât poate căra un camion). Deci răspunsul ar trebui să fie DA.

Dar, blocurile de piatră nu pot fi sparte (tot timpul se vorbeşte în problemă de 50 de blocuri de piatră).

Atunci cum repartizăm cele 50 de blocuri de piatră în 7 camioane?

Ne spune principiul cutiei. Camioanele sunt "cutiile", iar blocurile de piatră sunt "obiectele". Punând în fiecare "cutie" câte 7 "obiecte" am aşezat 49 de obiecte ($7 \times 7 = 49$). A mai rămas un "obiect" (erau 50 de blocuri de piatră).

Înseamnă că într-un camion sunt 8 blocuri de piatră.

Presupunând că alegem cele mai uşoare 8 blocuri de piatră ele vor cântări:

$$370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 3016 \text{ (kg)}$$

Dar, într-un camion putem pune cel mult 3000 kg.

În concluzie, nu putem transporta toate cele 50 de blocuri de piatră într-un singur transport.