PROBLEME DE NUMĂRARE

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva probleme prin care se pun în evidenţă unele modalităţi de a se realiza numărarea în diferite situaţii.

Lecţia se adresează clasei a V-a.

Data: 8 noiembrie 2010

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Problema 1. La un turneu de fotbal participă n echipe, care joacă fiecare cu fiecare câte un meci. Câte meciuri se joacă în total în turneu?

Soluţia 1: Să numim echipele E_1, E_2, E_3, ... E_n.
Pentru început avem meciurile:

E_1 cu E_2, E_1 cu E_3, E_1 cu E_4, ..., E_1 cu E_n, în total $n-1$ meciuri.

Apoi,

E_2 cu E_3, E_2 cu E_4, E_2 cu E_5, ..., E_2 cu E_n, în total $n-2$ meciuri.

Atenţie! E_2 a jucat deja cu E_1.

În continuare avem

E_3 cu E_4, E_3 cu E_5, E_3 cu E_6, ..., E_3 cu E_n, în total $n-3$ meciuri.

....

E_{n-1} cu E_n adică 1 meci.

Atunci, numărul total de meciuri va fi

$$1+2+3+...+(n-1).$$

Rezultatul acestei sume este, aşa cum ne-a învăţat Gauss, $n(n-1):2$.

Soluţia 2: Problema poate fi privită şi astfel: *Orice meci se desfăşoară între două echipe.*

Atunci, prima echipă poate fi aleasă în n moduri, iar a doua echipă în $n-1$ moduri.

Atenţie! În acest fel unele meciuri au fost numărate de două ori. Am numărat şi E_1 cu E_2, dar şi E_2 cu E_1.

Acestea fiind spuse, folosind *regula produsului*, numărul de meciuri este $n(n-1):2$.

Comentariu. Cele două rezolvări pot reprezenta o justificare a faptului că

$$1+2+3+...+(n-1)=n(n-1):2.$$

Problema 2. Se consideră tabloul pătratic

1	2	3	...	25
26	27	28	...	50
51	52	53	...	75
...	...	...	...	...
601	602	603	...	625

Aflaţi numărul scris în centrul tabloului.

Soluţie. Trebuie să stabilim în primul rând care este centrul acestui tablou. Evident tabloul are 25 de coloane şi tot atâtea linii (rânduri). Înseamnă că centrul tabloului este acolo unde se intersectează coloana a treisprezecea cu linia a treisprezecea.

Pe fiecare linie numerele sunt consecutive. Astfel pe locul doi este numărul de pe primul loc plus 1, pe locul trei este numărul de pe primul loc plus 2 şi aşa mai departe. Pe locul 13 va fi numărul de pe primul loc plus 12.

Să vedem acum care este numărul cu care începe linia a treisprezecea.

Observăm

$$\begin{gathered}\text{Linia 1 începe cu 1, iar } 1 = 25 \cdot 0 + 1\\ \text{Linia 2 începe cu 26, iar } 26 = 25 \cdot 1 + 1\\ \text{Linia 3 începe cu 51, iar } 51 = 25 \cdot 2 + 1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \text{Linia 25 începe cu 601, iar } 601 = 25 \cdot 24 + 1\end{gathered}$$

Atunci

$$\text{Linia 13 începe cu } 25 \cdot 12 + 1 = 301.$$

În aceste condiţii numărul din centrul tabloului va fi

$$301 + 12 = 313.$$

Problema 3. Un număr natural se numeşte *palindrom* dacă el coincide cu răsturnatul său. Câte numere *palindrom* de 5 cifre există.

Soluţie. Dacă numărul este *palindrom*, atunci are forma $\overline{abcba}$, unde cifrele a, b, c pot fi şi egale. Deoarece a poate fi înlocuită cu 9 cifre (nu poate fi 0), b poate fi înlocuit cu 10 cifre, iar c tot cu 10 cifre, înseamnă că vom avea

$$9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$$

de numere *palindrom*.

Problema 4. Pe 1 ianuarie 2005 două vapoare pleacă din portul Constanţa. Primul stă pe mare 15 zile, se întoarce pentru 3 zile, apoi pleacă din nou în cursă. Al doilea stă pe mare 20 de zile, se întoarce pentru 4 zile, apoi pleacă din nou în cursă.

a) De câte ori, pe parcursul anului 2005, cele două vapoare vor pleca simultan din Constanţa?

b) Câte zile din 2005, cele două vapoare se vor afla în port în acelaşi timp?

Soluţie. a)Vom numi PAS numărul de zile petrecute pe mare plus numărul de zile petrecute în port de un vapor.

Pentru primul vapor 1 PAS are 18 zile (15+3), iar pentru al doilea vapor 1 PAS are 24 de zile (20+4).

Numărul de zile până la următoarea plecare simultană din port înseamnă un număr întreg de PAŞI parcurşi de cele două vapoare. Asta înseamnă că numărul de zile până la următoarea plecare simultană este atât multiplu al lui 18 cât şi multiplu al lui 24. Altfel spus, dacă primul vapor face n PAŞI, iar al doilea m PAŞI, atunci

$$18 \cdot n = 24 \cdot m$$

sau, prin împărţire la 6 avem

$$3 \cdot n = 4 \cdot m$$

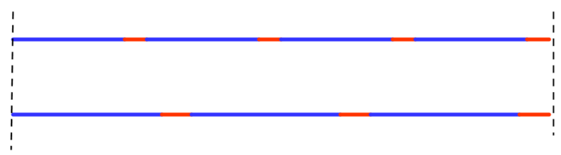
Trebuie găsite cele mai mici numere naturale pentru care egalitatea de mai sus este adevărată. Se observă imediat că pentru $n = 4$ şi $m = 3$ egalitatea este adevărată.

Înseamnă că numărul de zile până la următoarea plecare simultană din port este 72 ($18 \cdot 4$ sau $24 \cdot 3$).

Pentru a vedea de câte ori, pe parcursul anului 2005, cele două vapoare pleacă simultan din port trebuie să vedem de câte ori se cuprinde 72 în 365 (numărul de zile dintr-un an).

Cum 365 împărţit la 72 dă câtul 5 şi restul tot 5 înseamnă că vapoarele pleacă simultan din port de 6 ori (Să nu uităm de plecarea de la 1 ianuarie!)

b) În desenul de mai jos am reprezentat ce se întâmplă într-un interval de 72 de zile. Segmentele albastre reprezintă numărul zilelor petrecute pe mare, iar segmentele roşii reprezintă numărul zilelor petrecute în port.



Se observă că singura perioadă când cele două vapoare se află în acelaşi timp în port este la sfârşitul celor 72 de zile. Cele două vapoare stau în acelaşi timp în port timp de 3 zile.

Cum cele două vapoare pleacă simultan din port de 5 ori (aici nu trebuie să mai numărăm plecarea din 1 ianuarie) înseamnă că ele se vor afla în acelaşi timp în port timp de

$$3 \cdot 5 = 15 \ (\ zile\ )$$

Bibliografie:

[1] Ghioca A, Cojocaru L, Matematica gimnazială dincolo de manual, Editura GIL, 2005

[2] Schwarz D, Popa G, Probleme de numărare, Editura GIL, 2007