

CONCURSUL GAZETA MATEMATICĂ ȘI VIITORIOOLIMPICI.RO  
ETAPA FINALĂ  
CÂMPULUNG MUSCEL, 15 AUGUST 2018

**Clasa a VIII-a**

**Problema 1.** Demonstrați că dacă pentru un  $n \in \mathbb{N}^*$  numărul  $1 + 2^n + 4^n$  este prim, atunci  $n = 3^k$ , unde  $k \in \mathbb{N}$ .

VIITORIOOLIMPICI.RO

**Soluția 1:** Fie  $n = 3^k \cdot r$ , unde  $k \in \mathbb{N}$  și  $(r; 3) = 1$ . Demonstrăm că numărul  $p = 1 + 2^n + 4^n$  se divide la numărul  $q = 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k}$ . Evident că

$$q \mid \left(1 + 2^{3^k} + 4^{3^k}\right) \left(1 - 2^{3^k}\right) = 1 - 2^{3^{k+1}},$$

deci  $2^{3^{k+1}} \equiv 1 \pmod{q}$ .

Dacă  $r = 3s + 1$ , atunci  $n \equiv 3^k \pmod{3^{k+1}}$ , de unde  $2^n \equiv 2^{3^k} \pmod{q}$  și  $4^n \equiv 4^{3^k} \pmod{q}$ ; deci  $p \equiv 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k} = q \equiv 0 \pmod{q}$ , adică  $q \mid p$ .

Dacă  $r = 3s + 2$ , atunci  $n \equiv 2 \cdot 3^k \pmod{3^{k+1}}$ , de unde  $2^n \equiv 3^k \pmod{3^{k+1}}$ ; deci  $p \equiv 1 + 2^{3^k} + 4^{3^k} = q \equiv 0 \pmod{q}$ , adică  $q \mid p$ .

Așadar, în ambele situații am obținut că  $q \mid p$  și, cum  $p$  este prim, iar  $q > 1$ , deducem că  $p = q$  și în concluzie  $n = 3^k$ .

**Soluția 2:** Vom arăta mai întâi că  $x^2 + x + 1$  divide  $x^{2k} + x^k + 1$  dacă  $k$  nu este multiplu de 3.

Dacă  $k = 3j + 1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , arătăm că  $x^{2k} - x^2$  e divizibil cu  $x^3 - 1$ , deci cu  $x^2 + x + 1$ , iar  $x^k - x$  este divizibil cu  $x^3 - 1$ , deci cu  $x^2 + x + 1$ . Rezultă că și diferența  $x^{2k} - x^2 - (x^k - x) = (x^{2k} + x^k + 1) - (x^2 + x + 1)$  este divizibilă cu  $x^2 + x + 1$  și, în fine,  $x^{2k} + x^k + 1$  este divizibil cu  $x^2 + x + 1$ . Cum  $x^{2k} - x^2 = (x^k - x)(x^k + x)$ , este suficient să demonstrăm că  $x^k - x$  este divizibil cu  $x^3 - 1$ . Ori  $x^{3j+1} - x = x((x^3)^j - 1^j) = x(x^3 - 1)(x^{3j-3} + x^{3j-6} + \dots + x^3 + 1)$ , este divizibil cu  $x^3 - 1$ .

Analog se arată că dacă  $k = 3j + 2$ , cu  $j \in \mathbb{N}$ , atunci  $x^{2k} - x$  și  $x^k - x^2$  sunt divizibile cu  $x^3 - 1$ .

Așadar, dacă  $n$  nu e putere a lui 3, atunci  $n = 3^k \cdot r$ , cu  $(r, 3) = 1$ ,  $r > 1$ , iar  $4^n + 2^n + 1$  este divizibil cu  $4^{3^k} + 2^{3^k} + 1$  și mai mare ca acesta, deci nu este prim.

**Problema 2.** Aflați valoarea minimă a expresiei  $E(x, y) = \frac{x^3 + 16}{y^2 + 4} + \frac{y^3 + 16}{x^2 + 4}$  atunci când  $x, y \geq 0$ .

**Soluție:** Vom arăta că minimul căutat este 6.

Din inegalitatea mediilor,  $E(x, y) \geq 2\sqrt{\frac{x^3 + 16}{x^2 + 4} \cdot \frac{y^3 + 16}{y^2 + 4}} = 2\sqrt{\frac{x^3 + 16}{x^2 + 4} \cdot \frac{y^3 + 16}{y^2 + 4}}$ .

Arătăm că  $\frac{x^3 + 16}{x^2 + 4} \geq 3$ , cu egalitate dacă  $x = 2$ . Această inegalitate se scrie  $x^3 + 16 \geq 3(x^2 + 4)$ , adică  $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ . Avem  $x^3 - 3x^2 - x^2 + 4 = (x - 2)x^2 - (x - 2)(x + 2) = (x - 2)(x^2 - x - 2) = (x - 2)(x^2 - 2x + x - 2) = (x - 2)^2(x + 1) \geq 0$ , cu egalitate dacă și numai dacă  $x = 2$ . Așadar  $E(x, y) \geq 2\sqrt{3 \cdot 3} = 6$ , cu egalitate dacă (și numai dacă)  $x = y = 2$ .

**Observație:** O altă cale de a demonstra că  $E(x, y) \geq 6, \forall x, y \geq 0$  este următoarea:

Din inegalitatea rearanjamentelor avem  $\frac{x^3 + 16}{y^2 + 4} + \frac{y^3 + 16}{x^2 + 4} \geq \frac{x^3 + 16}{x^2 + 4} + \frac{y^3 + 16}{y^2 + 4} \geq 3 + 3 = 6$ .

**Problema 3.** Ana și Bogdan joacă un joc pe o tablă  $1 \times n$  împărțită în  $n$  pătrățele numerotate de la stânga la dreapta cu  $1, 2, \dots, n$ . Inițial, în pătrățelul 1 este plasat un pion. Ana și Bogdan mută alternativ. Ana mută prima. La fiecare mutare, jucătorul aflat la rând poate muta pionul fie cu 53 de pătrățele la dreapta, fie cu două pătrățele la stânga. (Nu sunt permise mutări prin care pionul să părăsească tabla de joc.) Câștigă jucătorul care plasează pionul pe pătrățelul cel mai din dreapta, cel cu numărul  $n$ . Care din cei doi jucători are strategie de câștig dacă  $n = 2017$ ? Dar dacă  $n = 2018$ ?

**Soluție:**

Dacă  $n = 2017$ , Bogdan are strategie câștigătoare. Dacă Ana mută 53 la dreapta, Bogdan mută 2 la stânga (poate muta astfel!), iar dacă Ana mută 2 la stânga, Bogdan mută 53 la dreapta (atâta timp cât poate). Astfel, după fiecare pereche de mutări, pionul avansează câte 51 de pătrățele la dreapta ajungând la  $1 + 39 \cdot 51 = 1990$  (fără să treacă prin 1964 de unde s-ar fi putut câștiga direct). Acum nu mai este (deocamdată) loc pentru mutări de 53 la dreapta, deci obligatoriu ambii jucători mută pionul cu 2 la stânga până când, după mutarea lui Bogdan, pionul ajunge la 1966. Ana e obligată să mute la 1964, iar Bogdan câștigă mutând la 2017.

Dacă  $n = 2018$ , Ana este cea care are strategie câștigătoare. Ea mută (obligată) la 54, apoi mută invers decât a mutat Bogdan la precedentă sa mutare. Astfel, în fiecare pereche de mutări „Bogdan urmat de Ana”, pionul avansează cu câte 51 până când ajunge, după 38 de perechi de mutări, la  $54 + 38 \cdot 51 = 1992$ . De aici se mută obligat cu câte 2 înapoi până la 1964 (mutarea Anei). Acum orice mută Bogdan, Ana face invers, mutând pionul la 2015. De aici iarăși se coboară obligat până la 1965, unde se ajunge prin mutarea lui Bogdan. (Acest lucru se poate vedea scriind efectiv pașii sau analizând modulo 4.) Atunci Ana poate muta la 2018 și câștiga.