EVALUARE şi EXEMPLU

de ANDREI ECKSTEIN

Câmpulung, 20 august 2013

O metodă foarte des folosită în rezolvarea problemelor care cer determinarea valorii minime sau maxime a unei expresii este metoda *evaluează, apoi dă un exemplu.* Pentru o problemă de maxim, ,,*evaluează*" înseamnă ,,arată că maximul nu poate depăşi M". A doua parte a demonstraţiei constă în *a da un exemplu* în care valoarea M se atinge. Deseori dificultatea constă în ghicirea valorii M. Foarte frecvent vom fi confruntaţi cu următoarea dilemă: cel mai ,,bun" M pentru care am găsit un exemplu nu coincide cu cel mai ,,bun" M pentru care am demonstrat o estimare: există un interval între cele două numere. Să încercăm oare să îmbunătăţim estimările noastre, eventual recurgând la alte argumente, sau să perseverăm în căutarea unor exemple ,,mai bune"? Din păcate nu există un răspuns sistematic la această dilemă.

A. Probleme rezolvate în detaliu:

1. Care este numărul maxim de numere naturale distincte care au suma 2013?

Soluţie: Arătăm mai întâi că numărul maxim nu poate depăşi 63 (,,evaluarea").
Să presupunem că ar fi posibil ca suma a mai mult de 63 de numere naturale distincte să fie 2013. Atunci suma lor va fi cel puţin $0 + 1 + 2 + ... + 63 = \dfrac{63 \cdot 64}{2} = 2016 > 2013$, contradicţie. Astfel am demonstrat că putem avea cel mult 63 de numere.
A doua parte constă din a furniza un *exemplu* care să arate că există 63 de numere naturale distincte cu suma 2013.
Considerăm numerele $0, 1, 2, ..., 61$ şi 122. Suma acestora este $\dfrac{61 \cdot 62}{2} + 122 = 2013$.

2. Care este numărul maxim de ture care pot fi plasate pe tabla de şah astfel încât nicicare două să nu se atace una pe alta?
Aceeaşi întrebare pentru dame, nebuni, regi şi cai.
(Nu se va ţine seama de culoarea pieselor.)

Soluţie:
(a) *ture*
Nu putem avea două ture pe aceeaşi linie, deci putem plasa cel mult 8 ture (partea de ,,evaluare").
Plasând 8 ture pe o diagonală oferă un exemplu de cum pot fi plasate 8 ture pe tablă. Am arătat astfel că maximul căutat este 8.

(b) *dame*
Nu putem avea două dame pe aceeaşi linie, deci putem plasa cel mult 8 dame pe

tablă (partea de ,,evaluare”).
Un exemplu cu 8 dame pe tablă care nu se atacă una pe alta este ceva mai greu de construit. Cu notaţiile de la şah (liniile 1,2,...,8, coloanele a,b,...,h) un exemplu ar fi să plasăm damele în a2, b4, c6, d8, e3, f1, g7 şi h5.
Făcând abstracţie de rotaţii şi simetrii, sunt 12 moduri de a plasa cele 8 dame; vezi http://en.wikipedia.org/wiki/8_queens

(c) *nebuni*
evaluare: Să considerăm diagonala care uneşte colţul din stânga jos cu cel din dreapta sus, precum şi toate ,,liniile diagonale mai scurte” paralele cu aceasta. Sunt 15 asemenea diagonale, dintre care două trec doar prin câte un singur pătrat unitate (pătratele din colţurile din stânga sus şi respectiv dreapta jos). Aceste 15 linii acoperă toată tabla, prin urmare nu putem avea mai mult de 15 nebuni pe tablă. Dar dacă am avea 15 nebuni, doi dintre ei vor trebui să se găsească în colţuri opuse ale table (stânga sus şi dreapta jos), deci putem plasa cel mult 14 nebuni.
Un exemplu cu 14 nebuni: plasăm câte un nebun în fiecare pătrat al primei linii, apoi câte un nebun în fiecare pătrat din ultima linie, cu excepţia colţurilor.

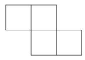
(d) *regi*
Împărţind tabla în 16 pătrate 2×2, este evident că în niciun pătrat nu putem plasa mai mult de un rege, deci putem avea cel mult 16 regi. Pe de altă parte, plasând câte un rege în colţul din dreapta sus pentru fiecare din aceste 16 pătrate 2×2 obţinem un exemplu de 16 regi pe o tablă de şah, nicicare doi atacându-se reciproc. Prin urmare maximul căutat este 16.

(e) *cai*
Pentru partea de *exemplu*, să observăm că la orice mutare, un cal schimbă culoarea pătrăţelului. Astfel, plasând 32 de cai pe cele 32 de pătrăţele albe ale tablei, aceşti 32 de cai nu se atacă unul pe altul.
Pentru a demonstra că nu se pot plasa mai mult de 32 de cai care să nu se atace unul pe altul (partea de *evaluare*), observăm că în oricare din dreptunghiurile 2×4 putem plasa cel mult 4 cai. (Putem grupa în perechi cele 8 pătrate ale dreptunghiului astfel încât dacă am plasa câte un cal în cele două pătrate ale unei perechi, aceştia să se atace unul pe altul.) Deoarece putem acoperi tabla de şah cu 8 asemenea dreptunghiuri şi în fiecare din ele putem avea cel mult 4 cai, deducem că în total putem avea maxim 32 de cai.

Observaţie: Dacă un exemplu nu poate fi îmbunătăţit (numim un asemenea exemplu ,,saturat”), acest lucru nu înseamnă neapărat că el oferă numărul maxim. Dacă am plasat n piese şi oricum am plasa o a $n+1$-a aceasta ar fi atacată de una din precedentele n piese, înseamnă că exemplul nostru cu n piese este saturat, dar nu neapărat maximal. Poate că, plasând altfel primele n piese, am fi putut plasa şi o a $n+1$-a.

Exerciţiu: Arătaţi că o configuraţie formată din 7 ture pe tabla de şah nu poate fi saturată. Rămâne afirmaţia adevărată şi pentru o configuraţie de 7 dame?

B. Probleme discutate.

3. Determinaţi numărul maxim de figuri congruente cu  care pot fi plasate într-un pătrat 7×7 (fără suprapuneri) astfel încât fiecare figură să acopere exact 4 pătrăţele unitate.

4. În fiecare pătrat al unei table 9×9 stă câte un cărăbuş. La un semnal, fiecare cărăbuş se mută diagonal pe un pătrăţel vecin. Este posibil ca mai mulţi cărăbuşi să se fi mutat aceleaşi pătrăţele şi niciunii în altele. Aflaţi numărul minim de pătrăţele care nu conţin cărăbuşi.

5. Se consideră un şir format din $2n$ pătrate colorate alternativ negru şi alb. O mutare constă în a alege o mulţime compactă de pătrate (care împreună formează un dreptunghi, adică fără spaţii între pătratele alese) şi a interverti culorile acestor pătrate (din alb în negru şi din negru în alb). Care este numărul minim de mutări necesare pentru a face tot rândul monocolor?

6. Se consideră o tablă de şah 8×8. În unele dintre pătratele unitate se trasează o diagonală astfel ca nicicare două asemenea diagonale să nu aibă vreun punct comun. Care este numărul maxim de diagonale care se pot trasa?

baraj juniori, 2010

C. Probleme rezolvate.

1. Determinaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că putem colora fiecare număr natural nenul în roşu sau albastru astfel încât n să fie simultan suma a cinci numere roşii precum şi suma a cinci numere albastre.

Concursul interjudeţean ,,L. Panaitopol", 2012, clasa a 6-a

Soluţie: Numărul este 28. Suma primelor 10 numere naturale nenule este egală cu 55. Deoarece 55 este impar, mulţimea celor 10 numere nu poate fi împărţită în două submultimi disjuncte cu sumele elementelor egale. Considerăm mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$ care are suma elementelor egală cu 56. Colorăm, de exemplu, numerele 1, 2, 5, 9 şi 11 în roşu, iar numerele 3, 4, 6, 7 şi 8 în albastru. Suma numerelor din fiecare culoare este egală cu 28.

2. Pe o tablă 9×9 sunt colorate 40 din cele 81 de pătrăţele. Despre o linie orizontală sau verticală se spune că este *bună* dacă ea conţine mai multe pătrăţele colorate decât necolorate. Care este cel mai mare număr de linii *bune* (orizontale şi verticale) pe care îl poate avea tabla?

Olimpiadă Kazahstan, 2005

Soluţie: Putem avea maximum 8 rânduri şi 8 coloane *bune* căci fiecare trebuie să conţină 5 pătrăţele colorate şi sunt 40 cu totul. O asemenea colorare: coloana 1 şi rândul 1 necolorate, apoi în pătratul 8×8 rămas colorăm două pătrate 4×4 opuse şi diagonala ce trece prin cele două pătrate 4×4 albe.

3. Căsuţele unui pătrat 100×100 se colorează în alb şi negru astfel încât în orice dreptunghi 1×2 există cel puţin o căsuţă neagră şi în orice dreptunghi 1×6 există două căsuţe negre vecine. Care e numărul minim de căsuţe negre ale pătratului?

Olimpiadă Ucraina, 2000

Soluţie: Orice dreptunghi 1×5 trebuie să conţină măcar 3 căsuţe negre. Dacă am avea succesiunea ANANA nu-l mai putem completa la un dreptunghi 1×6 cu două negre vecine. Atunci avem cel puţin 6000 de căsuţe negre. Un exemplu cu 6000 e să pavăm pătratul cu pătrate 5×5 având liniile NANAN, ANANN, NANNA, ANNAN, NNANA.

4. În fiecare câmp unitate al unei livezi $m \times n$ se află câte un măr. Un număr de k arici pornesc, pe rând, din câmpul stânga-sus al livezii şi se mişcă spre câmpul din dreapta-jos. La fiecare mişcare un arici se poate deplasa cu un singur câmp, spre dreapta sau în jos, fără a ieşi din livadă. Ariciul poate să culeagă mărul din câmpul pe care îl vizitează, dacă acesta nu a fost deja cules de alt arici. Determinaţi numărul k minim pentru care aricii pot culege toate merele.

Iurie Boreico, Recreaţii Matematice nr. 2/2007

Soluţie: Marcăm pătrăţelele aflate pe bisectoarea unghiului drept care formează colţul din stânga-jos. Cele $\min\{m, n\}$ mere de pe ea trebuie culese de arici diferiţi. Pe de altă parte acest număr, $\min\{m, n\}$, este suficient.

5. Pe un cerc sunt scrise numerele naturale de la 1 la N astfel încât fiecare două numere vecine să aibă cel puţin o cifră comună. Să se găsească cel mai mic număr N pentru care se poate realiza acest lucru şi să se dea un astfel de exemplu.

Adrian Burlan, Olimpiada locală Vâlcea, 2010

Soluţie: Deoarece numărul 1 apare pe cerc, trebuie să apară cel puţin şi 10 şi 11, deci implicit şi 9. Dar atunci trebuie să apară pe cerc şi 19 şi 29. Aşadar $N \geq 29$. Vom demonstra că pentru $N = 29$ putem plasa numerele de la 1 la N astfel încât fiecare două numere vecine să aibă cel puţin o cifră comună. Iată un exemplu de cum putem dispune numerele pe cerc: 19, 9, 29, 28, 8, 18, 17, 7, 27, 26, 6, 16, 15, 5, 25, 24, 4, 14, 13, 3, 23, 22, 2, 12, 11, 1, 21, 20, 10.

6. Dintr-un pătrat $n \times n$ se elimină pătrăţelele unitate pentru care numărul liniei şi numărul coloanei sunt ambele impare. Aflaţi numărul minim de dale dreptunghiulare de forma $k \times 1$, unde $k \in \{1, 2, ..., n\}$, necesar pentru a pava suprafaţa rămasă.

Andrei Eckstein, baraj de juniori, 2012

Soluţie: Vom nota cu a_{ij} pătrăţelul unitate aflat pe linia i şi coloana j, $1 \leq i, j \leq n$. Colorăm pătratul iniţial asemeni unei table de şah astfel încât a_{11} să fie colorat cu negru.
Observaţia de bază este că, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$, diferenţa dintre numărul de pătrăţele albe şi respectiv negre pe care le acoperă o dală $k \times 1$ este cel mult egală cu 1.

Dacă $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, în figura rămasă sunt $2m^2 + 2m$ pătrăţele albe şi m^2 pătrăţele negre, deci, ţinând cont de observaţia de bază, sunt necesare cel puţin $m^2 + 2m$ dale. Acest minim este atins dacă se pavează fiecare pătrăţel aflat pe o linie impară cu o dală 1×1, iar liniile pare cu dale $n \times 1$.
Dacă $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$, în figura rămasă sunt $2m^2$ pătrăţele albe şi m^2 pătrăţele negre, deci, ţinând cont de observaţia de bază, sunt necesare cel puţin m^2 dale. O pavare cu m^2 dale este imposibilă, deoarece, în acest caz fiecare dală ar avea în capete pătrăţele albe, iar pătrăţelul a_{nn}, care este negru, trebuie să se afle în capătul unei dale.
Prin urmare, sunt necesare cel puţin $m^2 + 1$ dale. Acest minim este atins dacă se pavează ca mai sus pătratul format de primele $n - 1$ linii şi $n - 1$ coloane (astfel se folosesc $(m-1)^2 + 2(m-1) = m^2 - 1$ dale), iar bordura rămasă se acoperă cu o dală $n \times 1$ şi o dală $(n-1) \times 1$.

D. Probleme propuse.

1. Să se afle cel mai mare n cu proprietatea că există n numere întregi mai mari ca 2 astfel încât suma oricăror trei dintre ele este un număr prim. [1]

2. Isaac plasează câteva jetoane pe pătrăţelele unei table de şah 8×8 astfel încât în niciunul din cele 64 de pătrăţele să nu se afle mai mult de un jeton. Determinaţi, cu justificare, numărul maxim de jetoane care pot fi plasate pe tablă astfel încât pe nicio linie, pe nicio coloană şi pe niciuna din cele două diagonale ale pătratului să nu se afle 5 sau mai multe jetoane.

Olimpiadă Marea Britanie, 2012-2013

3. Care este numărul maxim de pătrăţele ale unei table de şah 8×8 care pot fi colorate cu verde astfel încât orice „trominou” (figură în formă de „L” formată din lipirea a 3 pătăţele) să acopere cel mult un pătrăţel verde? (Trominoul poate fi rotit şi plasat în orice poziţie.) [2]

4. Care este cel mai mic număr de pătrăţele ale unei table de şah 8×8 care pot fi colorate cu verde astfel încât în fiecare trominou să existe cel puţin un pătrăţel colorat verde?
Indicaţie: Împărţiţi tabla de şah în 16 pătrate 2×2. Aplicaţi principiul cutiei: pătratele sunt cutiile, iar pătrăţelele verzi sunt bilele.

E. Răspunsuri la problemele propuse.

1. 4; **2.** 32; **3.** 32; **4.** 32;

BIBLIOGRAFIE

[1] L. Panaitopol, D. Şerbănescu − *Probleme de Teoria numerelor şi Combinatorică pentru juniori*, Ed. GIL, 2003

[2] D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg − *Russian Experience*, Universities Press, 1996