**Problema 2.** a) Demonstraţi că în orice triunghi bisectoarea se află între înălţimea şi mediana duse din acelaşi vârf.

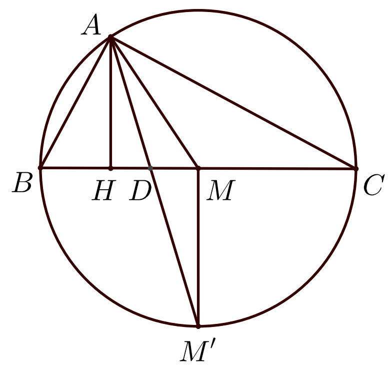
b) În triunghiul $ABC$ înălţimea, bisectoarea şi mediana împart unghiul $A$ în patru părţi egale. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.

$***$

**Soluţie.** a) Fie $H$, $D$ şi $M$ intersecţiile laturii $BC$ cu înălţimea, bisectoarea, respectiv mediana duse din $A$. Dacă $AB = AC$, atunci $H = D = M$. Să presupunem $AC > AB$, deci $\widehat{B} > \widehat{C}$. Din teorema bisectoarei avem $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} < 1$, deci $DB < DC$. Rezultă $DB < \dfrac{DB + DC}{2} = BM$, prin urmare punctul $D$ se află între $B$ şi $M$. Trebuie să mai arătăm că punctul $D$ se află între $H$ şi $C$.

Dacă $\widehat{B} \geqslant 90°$, este evident. Considerăm cazul $\widehat{B} < 90°$. Cum $\widehat{B} > \widehat{C}$, rezultă $\widehat{BAH} < \widehat{HAC}$, de unde $\widehat{BAH} < \dfrac{\widehat{BAH} + \widehat{HAC}}{2} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BAD}$, ceea ce încheie demonstraţia.

b) Fie $M'$ intersecţia bisectoarei $AD$ cu cercul circumscris triunghiului $ABC$. Deoarece $\overset{\frown}{BM'} = \overset{\frown}{M'C}$, deducem că $MM' \perp BC$, deci $MM' \parallel AH$, iar de aici obţinem $\widehat{DM'M} = \widehat{HAD} = \widehat{DAM}$ şi mai departe $AM = MM'$.




Perpendiculara pe $AM'$ dusă prin mijlocul ei trece prin centrul cercului circumscris. Pe de altă parte, acest centru se află pe $MM'$. Cum $AM = MM'$ rezultă că $M$ este centrul cercului circumscris, prin urmare $\widehat{BAC} = 90°$.

Din ipoteză avem $\widehat{BAH} = \widehat{HAD} = \widehat{DAM} = \widehat{MAC}$ şi atunci obţinem $\widehat{BAH} = \dfrac{90°}{4} = 22°30'$. Rezultă $\widehat{ABC} = 67°30'$ şi $\widehat{ACB} = 22°30'$.