Principiul extremal

Marius Perianu
Colegiul Naţional Ion Minulescu" Slatina

1 decembrie 2014

Abstract

Articolul de faţă prezintă ideile generale de aplicare a principiului extremal, formele sub care se prezintă acesta şi exemple de utilizare în rezolvarea problemelor de algebră, geometrie, combinatorică.

Materialul a fost prezentat de autor în cadrul şedinţelor de pregătire ale lotului lărgit de juniori.

1 Suportul teoretic

În matematica elementară, aplicarea *principiului extremal* ca metodă de raţionament în rezolvarea unei probleme reprezintă studierea proprietăţilor celui mai mic/mare element al unei mulţimi asociate problemei şi analizarea informaţiilor oferite de acest element *extremal*.

În general, vom aplica principiul extremal în problemele în care intervin următoarele tipuri de mulţimi:

a) *mulţimi finite* – care au atât un cel mai mic element cât şi un cel mai mare element;

b) *submulţimi ale lui* $\mathbb{N}$ – care au întotdeauna un cel mai mic element.

Evidenţiem cele de mai sus prin două probleme:

$\boxed{\textbf{Problema 1}}$ *Să se determine mulţimile* $A \subset \mathbb{N}^*$ *cu proprietatea că* $\forall\ x, y \in A,\ x > y \Rightarrow x - y \in A.$

Concursul Nicolae Coculescu 2005

Soluţie. Fie $a = \min A$ şi $x \in A$ ales arbitrar. Din teorema împărţirii cu rest, există $q, r \in \mathbb{N}$, $r < a$, astfel încât $x = aq + r$.

Presupunând $r > 0$, folosind proprietatea din enunţ rezultă că numerele $x - a$, $x - 2a$, ..., $x - qa \in A$, deci $r \in A$, contradicţie, deoarece r este un element al lui A mai mic decât $\min A$. Ca urmare, $r = 0$. Rezultă că $a \mid x$, pentru orice $x \in A$. Atunci:

– dacă A este finită şi $na = \max A$, atunci $A = \{a, 2a, ..., na\}$;

– dacă A este infinită, atunci $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

$\boxed{\textbf{Problema 2}}$

Determinaţi mulţimile $A \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *cu proprietatea că pentru orice* $n \in A$, $n^2 + 4 \in A$ *şi* $[\sqrt{n}] + 1 \in A$.

Baraj 4 OBMJ 2007

Soluţie. Fiind o submulţime a mulţimii numerelor naturale, A admite un cel mai mic element. Fie $a = \min A$ $(a \geq 2)$.

Atunci $[\sqrt{a}] + 1 \in A$, deci $[\sqrt{a}] + 1 \geq a \Leftrightarrow [\sqrt{a}] \geq a - 1 \Rightarrow \sqrt{a} \geq a - 1 \Leftrightarrow a(a - 3) + 1 \leq 0$, cu soluţia unică (în condiţiile problemei) $a = 2$.

Pentru orice număr natural $n \in A$, rezultă că $\left[\sqrt{n^2 + 4}\right] + 1 \in A$, adică $n + 1 \in A$. Ca urmare, $A = \{2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

În unele probleme în care se cere să se demonstreze că o anumită afirmaţie este falsă, alegerea elementului minimal α (respeciv maximal) trebuie coroborată cu construcţia unui nou element extremal, ceea ce conduce la contrazicerea minimalităţii (maximalităţii) lui α. Un exemplu clasic de aplicare a acestei idei este:

Problema 3 *Să se demonstreze că mulţimea numerelor prime este infinită.*

Soluţie (Euclid). Presupunem prin absurd că mulţimea $\mathcal{P}$ a numerelor prime este finită, de cardinal n $(n \in \mathbb{N}^*)$, şi fie $p_1 < p_2 < ... < p_n$ elementele sale. Atunci numărul $p = p_1 p_2 ... p_n + 1$ este tot un număr prim, deoarece nu este divizibil cu niciunul dintre numerele p_1, p_2, ..., p_n şi, în plus, este mai mare decât cel mai mare element al mulţimii $\mathcal{P}$. Ca urmare, $\mathcal{P}$ este infinită.

Proprietatea de ordonare a mulţimii numerelor naturale pune în evidenţă două proprietăţi speciale ale mulţimii $\mathbb{N}$:

(1) Nu există un şir infinit strict descrescător de numere naturale $n_1 > n_2 > ... > n_i > n_{i+1} > ...$

(2) Dacă şirul de numere naturale $(n_i)_{i \geq 1}$ este descrescător: $n_1 \geq n_2 \geq ... \geq n_i \geq n_{i+1} \geq ...$, atunci el devine staţionar de la un anumit rang încolo, adică există i_0 astfel încât $n_{i_0} = n_{i_0+1} = n_{i_0+2} = ...$

O astfel de metodă, aplicată în cazul în care se poate construi un element *mai mic* decât *elementul minimal*, aparţine lui Pierre de Fermat şi este cunoscută sub numele de *descendenţă infinită*. Ea poate fi formulată în modul următor:

Metoda descendenţei infinite a lui Fermat (MDIF). *Fie m un număr natural şi $\mathcal{P}$ o proprietate referitoare la numerele naturale nenule astfel încât dacă $\mathcal{P}(k)$ este adevărată pentru un număr $k > m$, atunci există $j \in \mathbb{N}$, $m < j < k$, astfel încât $\mathcal{P}(j)$ este adevărată.*

Atunci $\mathcal{P}(n)$ este falsă pentru orice $n > m$.

Acest lucru se întâmplă deoarece dacă ar exista $n > m$ pentru care $\mathcal{P}(n)$ este adevărată, atunci s-ar putea construi un şir infinit de numere naturale pentru care propoziţia $\mathcal{P}$ ar fi adevărată: $n > n_1 > n_2 > ... > n_i > n_{i+1} > ...$, ceea ce nu este posibil.

Exemplificăm această metodă prin două probleme date la concursurile naţionale din Rusia:

Problema 4

Să se rezolve în numere naturale ecuaţia $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Soluţie. Se observă că $(0, 0, 0)$ este soluţie. Să presupunem că ecuaţia are o soluţie netrivială (x_0, y_0, z_0). Deoarece $\sqrt[3]{2}$ şi $\sqrt[3]{4}$ sunt ambele iraţionale, numerele x_0, y_0 şi z_0 sunt toate nenule. Să observăm că x_0 este cu necesitate par. Ca urmare, $x_0 = 2x_1$, cu $x_1 \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind, obţinem $4x_1^3 + y_0^3 = 2z_0^3$, deci şi y_0 este par, adică $y_0 = 2y_1$, cu $y_1 \in \mathbb{N}^*$. Analog rezultă $z_0 = 2z_1$, cu $z_1 \in \mathbb{N}^*$.

Continuând raţionamentul, obţinem un şir de soluţii naturale $(x_n, y_n, z_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător, contradicţie. Deci ecuaţia dată are doar soluţia $x = y = z = 0$.

Observaţie. Soluţia problemei poate fi prezentată şi astfel: Presupunând că există soluţii $(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, dintre toate soluţiile o alegem pe cea cu suma componentelor cea mai mică; fie aceasta (x_0, y_0, z_0). Procedând ca mai sus, obţinem o nouă soluţie (x_1, y_1, z_1) a ecuaţiei din enunţ, pentru care $x_1 + y_1 + z_1 < x_0 + y_0 + z_0$, contradicţie cu minimalitatea alegerii. Metoda descendenţei infinite ne spune că presupunerea făcută – existenţa soluţiilor nenule – este falsă.

Problema 5

Să se rezolve în numere întregi sistemul $\begin{cases} x^2 + 6y^2 = z^2 \\ 6x^2 + y^2 = t^2 \end{cases}$.

Soluţie. La fel ca mai sus, se observă că $(0, 0, 0, 0)$ este soluţie a sistemului. Vom presupune că există soluţii netriviale. Evident, orice soluţie (x, y, z, t) generează o soluţie cu componente strict pozitive, şi anume $(|x|, |y|, |z|, |t|)$. Dintre toate soluţiile (x, y, z, t) cu componente strict pozitive, o alegem pe cea pentru care suma $x + y + z + t$ este minimă.

Adunând ecuaţiile, obţinem $7\left(x^2 + y^2\right) = z^2 + t^2$, deci $7 \mid z^2 + t^2$. Studiind resturile pătratice modulo 7, deducem că $7 \mid z$ şi $7 \mid t$, deci $z = 7z_1$ şi $t = 7t_1$, cu $t_1, z_1 \in \mathbb{N}^*$. Înlocuind în ecuaţia anterioară, obţinem $x^2 + y^2 = 7\left(z_1^2 + t_1^2\right)$, deci $7 \mid x^2 + y^2$, adică $7 \mid x$ şi $7 \mid y$. Ca urmare, $x = 7x_1$ şi $y = 7y_1$, cu $x_1, y_1 \in \mathbb{N}^*$. Revenind la sistemul iniţial, constatăm că $(x_1, y_1, z_1 t_1)$ este o nouă soluţie a acestuia, pentru care $x_1 + y_1 + z_1 + t_1 < x + y + z + t$, contradicţie cu minimalitatea alegerii.

În concluzie, sistemul admite doar soluţia banală $x = y = z = t = 0$.

Încheiem prezentarea cu câteva probleme cu aromă geometrică.

Problema 6

Să se demonstreze că în orice pentagon convex putem alege trei diagonale cu care se poate construi un triunghi.

Soluţie. Fie $[BE]$ cea mai lungă diagonală a pentagonului convex $ABCDE$. În patrulaterul $BCDE$ aplicăm proprietatea conform căreia suma diagonalelor este mai mare decât suma oricăror două laturi opuse; ca urmare:

$$BD + CE > BE + CD > BE,$$

deci se poate construi un triunghi de laturi BD, CE şi BE.

Problema 7 *Orice poliedru convex are cel puţin două feţe cu acelaşi număr de laturi.*

Soluţie. Fie F faţa cu cel mai mare număr m de muchii. Dacă nu există nicio altă faţă cu m muchii, cele m feţe adiacente lui F pot avea ca număr de laturi un element al mulţimii $\{3, 4, 5, ..., m - 1\}$. Sunt doar $m - 3$ posibilităţi pentru m feţe, deci, cu principiul cutiei, există cel puţin două feţe cu acelaşi număr de laturi.

Problema 8 *Fie $2n$ puncte în plan, oricare 3 necoliniare. Exact n dintre ele notate $A_1, A_2, ..., A_n$ reprezintă ferme, iar celelalte, notate $F_1, F_2, ..., F_n$ reprezintă fântâni. Arătaţi că există o asociere bijectivă între ferme şi fântâni, astfel încât oricare două din cele n drumuri drepte (segmente) fermă–fântână nu se intersectează.*

Soluţie. Pentru orice permutare σ a mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$, fie $S = \sum A_i F_{\sigma(i)}$. Dintre toate permutările, fie τ cea care minimizează pe S. Presupunând că există două segmente $A_i F_{\tau(i)}$ şi $A_j F_{\tau(j)}$ care se intersectează, înlocuind aceste segmente cu $A_i F_{\tau(j)}$ şi $A_j F_{\tau(i)}$ obţinem un drum total de lungime mai mică decât S, deoarece $A_i F_{\tau(i)} + A_j F_{\tau(j)} > A_i F_{\tau(j)} + A_j F_{\tau(i)}$ (diagonalele în patrulater au suma lungimilor mai mare decât suma lungimilor a două laturi opuse). Contradicţie.

Problema 9 Să se demonstreze că orice poligon convex de arie 1 poate fi inclus într-un dreptunghi cu aria 2.

Soluţie. Fie $[AB]$ diagonala de lungime maximă a poligonului. Prin A şi B construim perpendicularele a, respectiv b, pe $[AB]$. Să considerăm unul dintre semiplanele determinate de dreapta AB în care se găsesc vârfuri ale poligonului. Dintre acestea, fie C un vârf pentru care distanţa la $[AB]$ este cea mai mare posibilă; prin C ducem paralela c la AB care intersectează pe a în M şi pe b în N. Dacă şi celălalt semiplan determinat de AB conţine vârfuri ale poligonului, obţinem un vârf D cu proprietatea că distanţa de la D la AB este cea mai mare posibilă şi paralela d la AB care intersectează pe a în Q şi pe b în P. Evident, poligonul dat este inclus în dreptunghiul $MNPQ$.

Deoarce aria poligonului este cel puţin egală cu

$$\mathcal{A}[CAB] + \mathcal{A}[DAB] = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) + \frac{1}{2} AB \cdot d(D, AB) = \frac{1}{2} AB \cdot NP = \mathcal{A}[MNPQ],$$

rezultă că $\mathcal{A}[MNPQ] \leq 2$.

2 Probleme propuse

1. O mulţime finită S de puncte din plan are proprietatea că orice dreaptă care trece prin două dintre punctele lui S trece şi printr-un al treilea. Demonstraţi că toate punctele lui S sunt coliniare.

   Variantă: Dacă n puncte ale planului nu sunt toate coliniare, există o dreaptă care trece prin exact două puncte.

   James Joseph Sylvester (1893)

2. Să se determine mulţimile $A \subset \mathbb{N}^*$, cu cel puţin două elemente, având proprietatea că pentru orice $x, y \in A$, $x > y$, rezultă $\frac{x-y}{(x,y)} \in A$.

   Concursul Nicolae Coculescu 2007

3. Să se arate că ecuaţia $x^2+y^2 = 3\left(z^2+t^2\right)$ nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

4. Se consideră mulţimea $A = \left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\right\}$. Să se demonstreze că $A \cap \mathbb{N} = \varnothing$.

5. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural $n \geq 1$, numărul $s_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n+1}$ nu este natural.

6. Într-un tabel $n \times n$ se scriu numerele 0 şi 1 astfel încât dacă la intersecţia unei linii cu o coloană se află 0, atunci suma elementelor de pe linia şi coloana respectivă este cel puţin egală cu n. Să se demonstreze că suma celor n^2 numere din tabel este cel puţin egală cu $\frac{n^2}{2}$.

7. În fiecare punct laticial scriem un număr natural. Fiecare număr scris este media aritmetică a celor 4 numere vecine (sus, jos, stânga, dreapta). Demonstraţi că toate numerele sunt egale.

   USAMO 1983

8. Într-un pătrat 10×10 se scriu numerele naturale de la 1 la 100 în mod arbitrar. Elementele fiecărei linii se rearanjează (pe aceeaşi linie), în ordine crescătoare, de la stânga la dreapta. Apoi, elementele fiecărei coloane se rearanjează (pe aceeaşi coloană) în ordine crescătoare de sus în jos. Să se găsească valoarea minimă a sumei numerelor aflate la final pe diagonala stânga sus – dreapta jos.

   Clock-Tower Juniors Competition, 2009

9. Într-o ţară sunt 100 de aeroporturi şi distanţa dintre oricare două din ele este diferită. Din fiecare port decolează un avion şi zboară spre aeroportul cel mai apropiat de el. Să se demonstreze că în niciunul dintre aeroporturi nu pot ateriza mai mult de 5 avioane.

10. Douăzeci şi trei de prieteni, având greutăţi exprimate în numere întregi decid să joace un meci de fotbal. Unul dintre ei este ales pentru a fi arbitru, iar ceilalţi se împart în două echipe de câte 11 jucători, fiecare dintre echipe având aceeaşi greutate totală. Se observă că împărţirea în echipe cu aceeaşi greutate poate fi făcută indiferent de cine este ales arbitru dintre cei 23. Demonstraţi că cei 23 de prieteni au aceeaşi greutate.

    USAMO 1989

11. Se consideră $n \geq 3$ puncte în plan astfel încât oricare trei puncte formează un triunghi de arie cel mult egală cu 1. Să se arate că toate punctele se află în interiorul unui triunghi de arie cel mult egală cu 4.

12. Să se demonstreze că orice pentagon convex are un vârf pentru care distanţa de la acest vârf la latura opusă este strict mai mică decât suma distanţelor vârfurilor alăturate la aceeaşi latură.

Baraj 2 OBM+OIM 2008

13. Fie S o mulţime finită şi $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f : \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $X, Y \subset S$, avem $f(X \cap Y) = \min(f(X), f(Y))$. Să se determine $\max\limits_{f \in \mathcal{F}} |Imf|$.

Baraj 3 OBM+OIM 2007

Bibliografie

[1] Arthur Engel – *Probleme de matematică – Strategii de rezolvare (trad. Mihai Bălună)*, Editura GIL Zalău, 2006.

[2] Titu Andreescu, Dorin Andrica – *O introducere în studiul ecuaţiilor diofantiene*, Editura GIL Zalău, 2002

[3] Valentin Vornicu – *Olimpiada de Matematică de la provocare la experienţă*, Ed. Gil, Zalău 2003

[4] Marius Perianu, Florian Dumitrel – *5 ani de olimpiade şi concursuri şcolare în judeţul Olt*, Editura MathLogos, Slatina 2010

[5] www.math.ournet.md

[6] www.artofproblemsolving.com