NUMERE PRIME. NUMERE COMPUSE

Abstract. Articolul prezintă câteva rezultate legate de numere prime (forma numerelor prime, numărul divizorilor naturali,numerele prime şi pătratele perfecte sau cuburile perfecte) precum şi exemple de probleme reprezentative cu numere prime.

Lecţia se adresează clasei a V-a.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti.

Numerele prime reprezintă o clasă specială în mulţimea numerelor naturale.

Definiţie: Numim număr prim orice număr natural $p \geq 2$ care are exact doi divizori, pe 1 şi pe el însuşi.

Orice număr natural diferit de 0 şi 1 care nu este număr prim se numeşte număr compus.

Observaţie: 2 este singurul număr prim care este şi număr par. Toate celelalte numere prime sunt impare.

Justificare: Orice număr par mai mare decât 2 se divide evident cu 2 şi deci nu poate fi număr prim (are şi alţi divizori în afară de 1 şi el însuşi).

O modalitate de a găsi numerele prime mai mici decât un număr dat n o reprezintă "ciurul lui Eratostene". Pentru aceasta scriem în ordine crescătoare numerele naturale de la 2 până la n şi apoi eliminăm pe rând multiplii lui 2, multiplii lui 3, multiplii următorului număr pe care nu l-am eliminat încă şi aşa mai departe. Ne oprim în momentul în care următorul număr neeliminat, să-l numim p, verifică relaţia $p^2 \geq n$. Numerele rămase în şir sunt numere prime.

Câte numere prime există?

Problemă numărul de numere prime a fost rezolvată încă din antichitate de către Euclid.

Teoremă: Există o infinitate de numere prime.

Demonstraţie: Să presupunem că numărul de numere prime este finit şi notăm $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ mulţimea tuturor numerelor prime. Construim acum numărul $r = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Evident că numărul r nu se divide cu niciunul dintre elementele mulţimii P. Asta înseamnă că numărul r este număr prim şi nu face parte din mulţimea P. Putem introduce numărul r în mulţimea P şi apoi să repetăm procedeul. Evident acest procedeu se poate repeta la nesfârşit. În concluzie mulţimea numerelor prime nu este finită.

Descompunerea în factori primi

Cel mai important rezultat referitor la numere prime îl reprezintă teorema fundamentală a aritmeticii.

Teoremă: Orice număr compus se scrie ca produs de numere prime nu toate diferite. Scrierea este unică dacă nu luăm în calcul ordinea factorilor.

Demonstraţie: Fie N un număr compus. Fiind număr compus N are un divizor număr prim; să-l notăm p_1. Atunci putem scrie

$$N = p_1 \cdot N_1, \text{ cu } N_1 < N$$

Acum, pentru N_1 putem avea două situaţii: să fie număr prim sau să fie număr compus.

Dacă este număr prim problema este încheiată, numărul N s-a scris ca produs de două numere prime.

Dacă N_1 este număr compus, atunci el are un divizor număr prim; să-l notăm p_2. Vom putea scrie

$$N_1 = p_2 \cdot N_2, \text{ cu } N_2 < N_1$$

şi atunci N se va scrie

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot N_2, \text{ cu } N_2 < N_1 < N$$

Consideraţiile făcute despre N_1 le putem face acum despre N_2.

Procedând astfel vom ajunge ca în scrierea lui N ca produs să apară numai factori primi. Procesul se va termina la un moment dat având în vedere că numerele N_i devin din ce în ce mai mici.

Deoarece o parte dintre factori pot fi egali, pentru orice număr compus, N putem scrie

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k}. \ (1)$$

unde $p_1, p_2, ...p_k$ sunt factorii primi ai produsului, iar $n_1, n_2, ...n_k$ ne arată de câte ori se repetă fiecare factor.

Scrierea (1) se numeşte "descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime". Uneori spunem mai simplu "descompunerea în factori a numărului N".

Exemplu: Să luăm numărul 24.

Avem

$$24 = 2 \cdot 12$$

Deoarece $12 = 2 \cdot 6$ putem scrie

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 6$$

Acum, pentru că $6 = 2 \cdot 3$ vom scrie

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

sau

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

Calculele de mai sus pot fi aşezate astfel: în dreapta numerele prime care divid numerele scrise în dreapta; în dreapta se începe cu numărul dat apoi se scriu rezultatele împărţirii la factorul prim scris în stânga.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

şi atunci $24 = 2^3 \cdot 3$.

Faptul că un numă natural se scrie ca produs de puteri de numere prime ne permite să aflăm numărul divizorilor acelui număr.

Să presupunem că pentru un număr natural N avem $N = p_1^{n_1}$. Atunci divizorii lui N sunt: 1, p_1, p_1^2, ..., $p_1^{n_1}$. Observăm că numărul divizorilor este $n_1 + 1$.

Dacă $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$, pentru a scrie toţi divizorii vom folosi tabelul de mai jos. În acest tabel, pe prima linie sunt scrişi toţi divizorii lui N care conţin factorul prim p_2, iar pe prima coloană toţi divizorii care conţin factorul p_1. Toţi ceilalţi divizori se obţin prin înmulţirea unui element din prima coloană cu un element de pe prima linie. Numărul de divizori este egal cu numărul căsuţelor din dreptunghi, iar acesta se obţine înmulţind numărul căsuţelor de pe prima coloană cu numărul căsuţelor de pe prima linie.

1	p_2	p_2^2	p_2^3	$\cdots$	$p_2^{n_2}$
p_1	$p_1 \cdot p_2$	$p_1 \cdot p_2^2$	$p_1 \cdot p_2^3$	$\cdots$	$p_1 \cdot p_2^{n_2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$p_1^{n_1}$	$p_1^{n_1} \cdot p_2$	$p_1^{n_1} \cdot p_2^2$	$p_1^{n_1} \cdot p_2^3$	$\cdots$	$p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$

Cum pe prima coloană avem $n_1 + 1$ căsuţe, iar pe prima linie $n_2 + 1$ căsuţe tragem concluzia că numărul divizorilor lui $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$ este

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1).$$

În general, putem formula următoarea

Teoremă: Numărul divizorilor naturali ai numărului

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot ... \cdot p_k^{n_k}$$

este egal cu

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1)...(n_k + 1)$$

Alte teoreme despre numere prime

Teoremă: Orice număr prim $p \geq 5$ are forma $6k + 1$ sau $6k + 5$.

Demonstraţie: Se ştie că orice număr natural are una din formele $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4$ sau $6k + 5$. Acum, este evident că $6k, 6k + 2$ şi $6k + 4$ se divid cu 2, deci nu sunt numere prime. Deasemenea, $6k + 3$ se divide cu 3. Cum pentru $6k + 1$ şi $6k + 5$ nu putem preciza nici un divizor propriu rămâne că acestea sunt formele posibile pentru numerele prime.

Atenţie! Din teorema anterioară nu putem trage concluzia că un număr de forma $6k + 1$ sau $6k + 5$ este număr prim. Ceea ce putem afirma este că un număr despre care ştiu deja că este prim are una din aceste forme.

Teoremă: Dacă un număr prim p divide un pătrat perfect N, atunci p^2 îl divide pe N.

Demonstraţie: Dacă N este pătrat perfect, atunci $N = A^2$. Fie $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ descompunerea în factori a lui A. Atunci $N = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_k^2$.

Din ipoteză p divide N, deci p este unul dintre factorii $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Cum oricare p_i apare la puterea a doua, rezultă că p^2 divide pe N.

La fel putem arăta că

Teoremă: Dacă un număr prim p divide un cub perfect N, atunci p^3 îl divide pe N.

Probleme cu numere prime

Problema 1: Găsiţi numerele prime a, b, c ştiind că $a + 4b + 8c = 66$.

Soluţie: Rezolvarea unei astfel de probleme se bazează pe paritatea numerelor şi pe faptul că suma a două numere de aceeaşi paritate este un număr par, iar suma a două numere de parităţi diferite este un număr impar. În cazul nostru, $4b$ şi $8c$ sunt numere pare. Deasemenea, 66 este un număr par. Rezultă că a trebuie să fie număr par. Cum a este număr prim obţinem $a = 2$. Atunci ecuaţia devine $2 + 4b + 8c = 66$ sau $4b + 8c = 64$. Împărţind prin 4 rezultă $b + 2c = 16$. Acum, $2c$ este număr par, 16 este număr par, rezultă cu necesitate b este număr par. Cum b este număr prim, avem $b = 2$. înlocuind în ultima relaţie obţinem $c = 7$.

Problema 2: Să se determine n pentru care toate numerele $n, n+4, n+6, n+10, n+12, n+16, n+22$ sunt numere prime.

Soluţie: Ideea de rezolvare este următoarea: să găsim, prin încercări, o soluţie şi apoi să arătăm că este unică.

În cazul nostru observăm că pentru $n = 7$ obţinem numerele: 7, 11, 13, 17, 19, 23 şi 29, toate numere prime.

Să arătăm acum că $n = 7$ este singura soluţie.

Orice număr natural, în raport cu 7, are una din formele: $7k, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6$.

Acum, cu excepţia lui 7 nici un alt număr de forma $7k$ nu este număr prim, deci $n \neq 7k$.

Pentru $n = 7k + 1$ $n + 6 = 7k + 7$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 2$ $n + 12 = 7k + 14$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 3$ $n + 4 = 7k + 7$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 4$ $n + 10 = 7k + 14$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 5$ $n + 16 = 7k + 21$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 6$ $n + 22 = 7k + 28$, deci nu e număr prim.

În concluzie, singura soluţie este $n = 7$.