

PROBLEME REZOLVATE DIN GAZETA MATEMATICĂ

ABSTRACT. Materialul conține câteva probleme rezolvate apărute în Gazeta Matematică.

Lecția se adresează clasei a IV-a

Autor: Ion Cicu, Școala nr.96, București

Problema 1. La împărțirea a două numere naturale câtul este cu 7 mai mare decât împărțitorul, iar restul o pătrime din cât. Aflați cele două numere naturale, știind că împărțitorul, câtul și restul fac împreună 38.

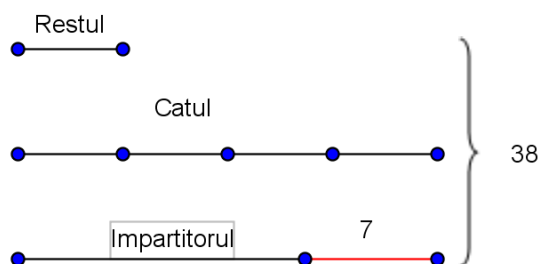
G.M.5/2010

Soluție. Vom folosi metoda figurativă.

Pentru că restul este o pătrime din cât am reprezentat mai întâi restul și apoi câtul, printr-un segment de patru ori mai mare.

Deoarece câtul este cu 7 mai mare decât împărțitorul am reprezentat împărțitorul cu 7 mai mic decât câtul.

Toate acestea se văd în desenul de mai jos.



Se observă că dacă la împărțitor adăugăm 7 vom obține un segment la fel de mare cum este câtul, așadar 9 segmente egale cu restul.

Dacă 9 resturi înseamnă 45 ($38 + 7 = 45$), atunci restul va fi

$$45 : 9 = 5$$

Atunci câtul va fi

$$5 \times 4 = 20$$

iar împărțitorul

$$20 - 7 = 13$$

Cu aceasta deîmpărțitul va fi

$$20 \times 13 + 5 = 265$$

În concluzie, cele două numere sunt 265 și 13.

Problema 2. Găsiți toate numerele pare de forma \overline{abcd} , cu cifre distincte, știind că cifra miilor este produsul celorlalte trei cifre.

G.M.2/2010

Soluție. Din enunț trebuie să avem

$$a = b \times c \times d$$

De aici este evident că toate cifrele sunt diferite de cifra 0.

De asemenea $b \times c \times d \leq 9$ (Să nu uităm că a este cifră)

Dacă numărul \overline{abcd} este par, atunci cifra d poate fi: 2, 4, 6 sau 8.

Dacă $d = 2$ atunci b și c sunt mai mici decât 5 ($2 \times 5 = 10$)

Pentru $b = 1$, c poate fi: 3 sau 4 și atunci a este 6 sau 8. Obținem numerele 6132 și 8142.

Pentru $b = 3$ avem numai posibilitatea $c = 1$ și atunci $a = 6$. Obținem numărul 6312.

Pentru $b = 4$ avem numai $c = 1$ și atunci $a = 8$. Obținem numărul 8412.

Dacă $d = 4$ atunci b și c sunt mai mici decât 3 ($3 \times 4 = 12$)

Pentru $b = 1$ avem numai $c = 2$ și atunci $a = 8$. Obținem numărul 8124.

Pentru $b = 2$ avem numai $c = 1$ și atunci $a = 8$. Obținem numărul 8214.

Dacă $d = 6$ sau $d = 8$ atunci b și c sunt mai mici decât 1. Cum nu mai avem la dispoziție decât o cifră rezultă că aceste situații nu sunt posibile.

În concluzie, numerele sunt: 6132, 8142, 6312, 8412, 8124, 8214.

Problema 3. Aflați numărul natural \overline{ab} , știind că are loc egalitatea: $a + \overline{bab} + \overline{bba} + \overline{aba} = \overline{abba}$

G.M.2/2010

Soluție. Folosind scrierea unui număr ca o sumă de produse avem

$$\begin{aligned} a + b \times 100 + a \times 10 + b + b \times 100 + b \times 10 + a + a \times 100 + b \times 10 + a = \\ = a \times 1000 + b \times 100 + b \times 10 + a \end{aligned}$$

Cu factorul comun avem

$$a \times (1 + 10 + 1 + 100 + 1) + b \times (100 + 1 + 100 + 10 + 10) = a \times (1000 + 1) + b \times (100 + 10)$$

de unde

$$a \times 113 + b \times 221 = a \times 1001 + b \times 110$$

De aici putem scrie

$$b \times 221 - b \times 110 = a \times 1001 - a \times 113$$

Folosind, din nou, factorul comun avem

$$b \times (221 - 110) = a \times (1001 - 113)$$

sau

$$b \times 111 = a \times 888$$

împărțind egalitatea prin 111 avem

$$b = 8 \times a$$

Deoarece a și b sunt cifre, singura variantă posibilă este $a = 1$ și $b = 8$.

În concluzie, numărul căutat este 18.

Problema 4. Fie numerele naturale $a = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2009$, $b = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2010$ și $c = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2009$. Arătați că numerele a , $b + 1$ și c împărțite la 2 dau același rest.

G.M.2/2010

Soluție. Cel mai simplu este să calculăm cele trei sume și apoi să facem împărțirea.

Calculăm suma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2009$.

Sunt 2009 termeni. Lăsând de-o parte numărul 2009 rămânem cu 2008 termeni care se pot grupa câte doi în 1004 grupe. Vom grupa astfel: 1 cu 2008, 2 cu 2007, 3 cu 2006 și așa mai departe. În fiecare grupă suma este 2009. Atunci

$$a = 1004 \times 2009 + 2009 = 2019045$$

Comentariu. Suma $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2007 + 2008 + 2009$ se poate calcula și altfel.

Putem așeza suma în două feluri, ca mai jos.

$$\begin{array}{r} a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2007 + 2008 + 2009 \\ a = 2009 + 2008 + 2007 + \dots + 3 + 2 + 1 \end{array}$$

Observând că numerele așezate unul sub altul au suma 2010 putem spune că de două ori a înseamnă de 2009 ori 2010.

Adică

$$2 \times a = 2009 \times 2010$$

de unde

$$a = 2009 \times 2010 : 2$$

În general,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = n \times (n + 1) : 2$$

Revenim la problemă și calculăm b . Folosind factorul comun avem

$$b = 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 1005)$$

și din comentariu de mai sus avem

$$b = 2 \times 1005 \times (1005 + 1) : 2 = 1011030$$

Pentru a calcula c să observăm că termenii lui c sunt numere impare. Dacă am fi avut și numerele pare aveam chiar a . Această observație ne permite să-l scriem pe c astfel

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2008 + 2009 - (2 + 4 + \dots + 2008)$$

de unde

$$c = 2019045 - 1009020 = 1010025$$

Așadar $a = 2019045$, $b = 1011030$, $c = 1010025$.

Atunci $a : 2$ dă câtul 1009522 și restul 1.

$(b + 1) : 2$ dă câtul 505515 și restul 1.

$c : 2$ dă câtul 505012 și restul 1.

Adică a , $b + 1$ și c dau același rest la împărțirea la 2.

Problema 5. Dacă $3 \times a + b = 11$ și $2 \times b - c = 8$, calculați $6 \times a + 8 \times b - 3 \times c$.
G.M.1/2010

Soluție. Avem relațiile

$$3 \times a + b = 11 \quad (*)$$

$$2 \times b - c = 8 \quad (**)$$

din care trebuie să aflăm

$$6 \times a + 8 \times b - 3 \times c \quad (***)$$

În relația (***) avem $6 \times a$, iar în relația (*) avem $3 \times a$. de asemenea, în relația (***) avem $3 \times c$, iar în relația (**) avem numai c . Aceste observații ne îndeamnă să înmulțim relația (*) cu 2 și relația (**) cu 3, apoi să le adunăm. Avem

$$6 \times a + 2 \times b = 22 \quad (** **)$$

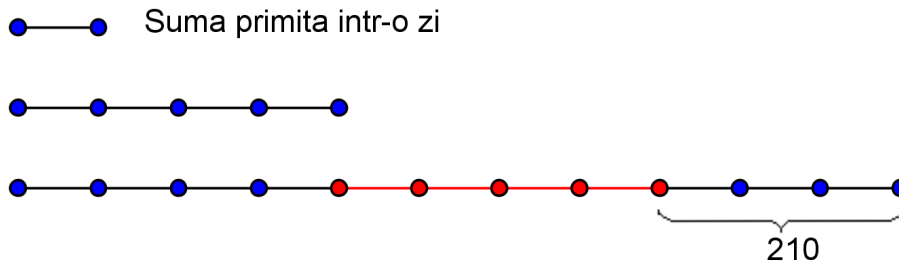
$$6 \times b - 3 \times c = 24 \quad (** ** *)$$

Adunând cele două relații și ținând cont de faptul că $2 \times b + 6 \times b = 8 \times b$ obținem

$$6 \times a + 8 \times b - 3 \times c = 46$$

Problema 6. Un muncitor lucrează 4 zile, iar altul lucrează 11 zile. Împărțind suma de bani primită de al doilea muncitor la suma de bani primită de primul muncitor obținem restul 210. Ce sumă de bani a primit fiecare știind că pentru fiecare zi lucrată cei doi muncitori au primit sume egale de bani?
G.M.1/2010

Soluție. Cheia problemei o reprezintă afirmația **pentru fiecare zi lucrată cei doi muncitori au primit sume egale de bani**. Dacă vom reprezenta suma primită pentru o zi printr-un segment, atunci problema poate fi figurată astfel



Se observă că suma primită de primul muncitor se reprezintă prin 4 segmente, iar suma primită de al doilea muncitor prin 11 segmente.

Afirmația **împărțind suma de bani primită de al doilea muncitor la suma de bani primită de primul muncitor obținem restul 210** o interpretăm pe desen astfel: trei segmente înseamnă 210.

Atunci, un segment, adică suma primită pentru o zi înseamnă

$$210 : 3 = 70 \text{ (lei)}$$

De aici, primul muncitor primește

$$70 \times 4 = 280 \text{ (lei)}$$

iar cel de-al doilea

$$70 \times 11 = 770 \text{ (lei)}$$