Lecție pentru clasa a V-a,
Sabin Gabriel Konya, clasa a V-a

NUMERE CELEBRE

Elev Konya Sabin Gabriel, clasa a V-a, Liceul Pedagogic "D.P.Perpessicius" ,Braila, profesor George-Florin Serban

Numere egiptene

1) Se numesc numere egiptene numerele ce se pot scrie ca suma numitorilor unor fractii avand numaratorul egal cu 1 , fractii a caror suma este un numar intreg pozitiv. De exemplu 11=2+3+6 si $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ **, 11 este un numar egiptean .**

a) Aratati ca 24 este un numar egiptean .

b) Aratati ca orice numar de forma $\frac{n\cdot(n^2+2)}{3}$ **,** $n\in N\setminus\{0,1,2\}$ **este egiptean .**

Soluţie : a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1\in N$ **. Deci n=2+6+12+4=24 este egiptean.**

b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+..+\frac{1}{(n-1)\cdot n}+\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+..+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=1\in N$

Deci numarul $x=1\cdot 2+2\cdot 3+..+(n-1)\cdot n+n=(1^2+2^2+..+n^2)-(1+2+..+n)+n$

$$x=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{n(2n^2+3n+1)-3n(n+1)+6n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1-3n-3+6)}{6}$$

$$x=\frac{n(2n^2+4)}{6}=\frac{n(n^2+2)}{3}$$ **este numar egiptean .**

Numere aproape perfecte.

2)Un numar n se numeste aproape perfect daca $2n-1=\sigma(n)$ **, unde** $\sigma(n)$ **reprezinta suma divizorilor naturali a lui n . Aratati ca exista o infinitate de numere aproape perfecte .**

Soluţie : $n=2^x$ **,** $x\in N$ **,** $2\cdot 2^x-1=\sigma(2^x)=1+2+2^2+....+2^x=2^{x+1}-1$ **(A)**

Deci exista o infinitate de numere $n=2^x$ **,** $x\in N$

Numere perfecte

3) Un numar se numeste perfect daca se scrie ca suma divizorilor sai mai putin el imsusi . De exemplu 6=1+2+3 este numar perfect . Aflati toate numerele perfecte care au exact 6 divizori .

Soluţie : Un numar natural cu 6 divizori naturali are formele $n=p^5$ **sau** $n=p^2\cdot q$ **.**

Daca $n=p^5$**,** $p^5=1+p+p^2+p^3+p^4$**,** $p^5=\dfrac{p^5-1}{p-1}$ **,** $p^6-p^5=p^5-1$**,** $p^5\cdot(p-2)=-1$

Fals. Daca $n=p^2\cdot q$ **,** $p^2\cdot q=1+p+p^2+pq+q$ **,** $q\cdot(p^2-p-1)=p^2+p+1$ **, deci** $(p^2-p-1)\,|\,p^2+p+1$ **,** $(p^2-p-1)\,|\,p^2-p-1$ **,** $(p^2-p-1)\,|\,2p+2$ **, dar** $p^2-p-1=p(p-1)-1$ **impar , deci** $(p^2-p-1)\,|\,p+1$ **, rezulta** $p^2-p-1\le p+1$ $p^2-2p-2\le 0$ **, p prim . Daca p=2 rezulta** $-2\le 0$ **(A) . Daca** $p\ge 3$ **atunci** $p^2-2p-2=p(p-2)-2\ge 3\cdot 1-2=1$ **fals . Deci p=2 , q=7 , n=28 .**

Numere pitagorice .

4) Trei numere naturale se numesc pitagorice daca verifica ecuatia $x^2+y^2=z^2$ **. Aratati ca cel putin un numar x, y sau z este divizibil cu 3 .**

Soluţie : Solutiile ecuatiei sunt : $x=t\cdot(u^2-v^2)$ **,** $y=t\cdot 2uv$**,** $z=t\cdot(u^2+v^2)$ **,** $t,u,v\in N$ **. Presupun ca t,u si v nu sunt divizibile cu 3 (in caz contrar reiese ca x, y sau z este divizibil cu 3). Daca u=3n+1 si v=3m+1 atunci** $x\,\vdots\,3$**. Daca u=3n+2 si v=3m+2 atunci** $x\,\vdots\,3$**. Daca u=3n+1 si v=3m+2 (sau invers) atunci** $x\,\vdots\,3$**.**

Numere Armstrong .

5) Un numar natural n avand k cifre se numeste Armstrong daca este egal cu suma cifrelor sale ridicate la puterea k . Aflati cel mai mic numar Armstrong de trei cifre .

Soluţie : $\overline{abc}=a^3+b^3+c^3$ **. Daca a=1 ,** $\overline{1bc}=1+b^3+c^3$ **,** $100+10b+c=1+b^3+c^3$ **,** $99+9b=b^3-b+c^3-c=b(b-1)(b+1)+c(c-1)(c+1)$ **par ,** $99+9b=9\cdot(b+11)$ **par , deci b impar . Daca b=1 ,** $\overline{11c}=2+c^3$ **,** $108+c=c^3$ **,** $c(c-1)(c+1)=108$**. Daca c=4 , 60=108 (F) , daca** $c\ge 5$ **,** $c(c-1)(c+1)=108\ge 120$ **(F) . Daca b=3 ,** $\overline{13c}=28+c^3$ **,** $102=c(c-1)(c+1)$**. Daca c=4 , 60=102 (F) , daca** $c\ge 5$ **,** $c(c-1)(c+1)=102\ge 120$ **(F). Daca b=5 ,** $\overline{15c}=126+c^3$ **,** $24=c(c-1)(c+1)$ **. Daca c=3 , 24=24 (A) . .Daca** $c\ge 4$ **,** $c(c-1)(c+1)=24\ge 60$ **(F). Deci am gasit numarul 153 .**

Numere bune .

6)Spunem ca un numar natural este "bun " daca pentru orice divizor a a lui n , a+1 este divizor al lui n+1. Determinati toate numerele naturale bune .

Olimpiada Rusia 2014

Soluţie : Vom arata ca toate numerele bune sunt 1 si toate numerele prime impare . Daca n=1 , 1|1 si 2|2 (A) . Daca n=2 ,1|2 , 2|3 (F). Daca n=p prim impar , 1|p , 2|(p+1) (A) si p|p , p+1|p+1 (A). Dar 1|n , 2|n+1 , deci n impar . Presupun ca n este un numar

compus , fie a un divizor propriu a lui n . Deci a|n , a|a rezulta a|n-a . Dar a+1|n+1 , a+1 |a+1 , a+1|n-a . Atunci $(n-a)\vdots a$, $(n-a)\vdots(a+1)$, $(n-a)\vdots[(a+1),a]=a\cdot(a+1)$
$n-a=a(a+1)x$, $x\in N$, $n=a(a+1)x+a$, $n=a\cdot[(a+1)x+1]$, $[(a+1)x+1]\,|\,n$,
$[(a+1)x+2]\,|\,n+1$, $[(a+1)x+2]\,|\,a(a+1)x+a+1$, $[(a+1)x+2]\,|\,(a+1)x+2$,
$[(a+1)x+2]\,|\,a(a+1)x+2a-a(a+1)x-a-1$, $[(a+1)x+2]\,|\,a-1$, $(a+1)x+2\le a-1$
Fals deoarece $(a+1)x+2>a-1$, $(a+1)x>ax>a$, **2>-1 . Deci n nu poate fi numar compus.**

Numere factoriale .

7) Numerele naturale $n!=1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot n$ **se numesc numere factoriale .**
Aflati cel mai mare numar natural n stiind ca $1\cdot2\cdot3\cdot....\cdot30\vdots10^n$ **.**

Soluţie : **"Daca p este numar prim aunci exponentul lui p in produsul** $n!=1\cdot2\cdot3\cdot.....\cdot n$ **este egal cu** $[\frac{n}{p}]+[\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+.......$ **"**

Exponentul lui 2 in 30! este $[\frac{30}{2}]+[\frac{30}{4}]+[\frac{30}{8}]+[\frac{30}{16}]=15+7+3+1=26$

Exponentul lui 5 in 30! este $[\frac{30}{5}]+[\frac{30}{25}]=6+1=7$ **.**Deci $30!=2^{26}\cdot5^7\cdot x$ **,** (x,10)=1
$30!=2^7\cdot5^7\cdot2^{19}\cdot x=10^7\cdot2^{19}\cdot x\vdots10^7$ **,** n=7 .

Numere palindromice .

8)Un numar se numeste palindrom daca este egal cu rasturnatul sau . Aflati numerele palindromice de 3 cifre care au 9 divizori naturali .

Soluţie : $\overline{abc}=\overline{cba}$ **, numerele sunt de forma** $\overline{aba}$ **,** $\overline{aba}=p^2\cdot q^2$**, p si q prime sau** $\overline{aba}=p^8$**. Daca** $\overline{aba}=p^2\cdot q^2$ **, n este patrat perfect** $u(\overline{aba})\in\{1,4,5,6,9\}$ **.Se gaseste** $\overline{aba}=11^2\cdot2^2=121\cdot4=484$ **palindrom . Daca** $\overline{aba}=p^8$**, p=2 ,** $\overline{aba}=2^8=256$ **(F) , daca** $p\ge3$ **,** $\overline{aba}\ge3^8=6561$ **(F).**

Numere automorfe .

9) Un numar automorf este numarul natural al carui patrat se termina in aceleasi cifre ce compun numarul insusi . Aflati cel mai mic numar automorf de doua cifre .

Soluţie : Daca $\overline{ab}^2=\overline{cab}$ **,** $u(\overline{ab}^2)=u(\overline{cab})=u(b^2)=b\in\{0,1,5,6\}$ **,** $\overline{ab}^2-\overline{ab}=100c$ **,** $\overline{ab}\cdot(\overline{ab}-1)=100c$ **. Daca** $\overline{ab}=10$ **,** $90=100c$ **(F). Daca** $\overline{ab}=11$ **,** $110=100c$ **(F).Daca** $\overline{ab}=15$ **,** $210=100c$ **(F). Daca** $\overline{ab}=16$ **,** $240=100c$ **(F). Daca** $\overline{ab}=20$ **,** $380=100c$

(F).Daca $\overline{ab}=21$ **,** $420=100c$ **(F). Daca** $\overline{ab}=25$ **,** $600=100c$ **c=6 (A). Deci** $\overline{ab}=25$ **,** $25^2=625$ **(A) .**

Numere Brown.

10)Perechile de numere intregi [m,n] cu proprietatea $n!+1=m^2$**. Aratati ca ecuatia are cel putin trei solutii .**
Solutie: Se gasesc solutiile : Se dau valori lui m , $(m,n)\in\{(5,4),(11,5),(71,7)\}$

Numere Euclid .

11) Numerele naturale de forma p_n+1 **, unde** p_n **este produsul primilor n numere naturale prime , se numesc numere Euclid . Aratati ca un numar Euclid nu poate fi patrat perfect.**

Soluţie : p_n **este de forma 4k+2 , deci** p_n+1 **va fi de forma 4k+3 , fals deoarece un patrat perfect nu poate avea forma 4k+3 .**

Numere puternice .

12)Un numar puternic este un intreg pozitiv cu proprietatea ca daca este divizibil cu numarul prim p atunci este divizibil si cu p^2**. Aflati toate numerele puternice de trei cifre care au 6 divizori naturali .**

Soluţie : Numerele cu 6 divizori sunt de forma $p^2\cdot q$ **sau** p^5**. Daca** $n=p^2\cdot q$ **fals deoarece** $n \vdots q$ **dar n nu este divizibil cu** q^2**. Daca** $n=p^5$ **, p=3 , n=243 .**
Daca $p\geq 5$ **atunci** $n\geq 3125$ **fals . Deci n=243 .**

Numere rare .

13)Numerele non-palindromice n cu proprietatea ca R(n)+n si R(n)-n sunt ambele patrate perfecte , unde R(n) este reversul lui n . Aflati numerele de doua cifre rare .

Soluţie : $\overline{ba}+\overline{ab}$ **si** $\overline{ba}-\overline{ab}$ **sunt patrate perfecte. Deci** $\overline{ba}+\overline{ab}=11\cdot(a+b)$ **p.p**
Rezulta a+b=11. Dar $\overline{ba}-\overline{ab}=9\cdot(b-a)$ **rezulta b-a este p.p ,** $b-a\in\{0,1,4\}$
Daca b-a=0 , b=a=5,5 (F) . Daca b-a=1 , atunci a=5 si b=6 , numarul 56 este rar.
Daca b-a=4 , atunci a=3,5 (F) .

Bibliografie : “Enciclopedia matematica a claselor de numere intregi “ , Marius Coman.