RUBRICA ELEVULUI

ASUPRA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE VECTORIALĂ

de CLAUDIU MÎNDRILĂ, TÂRGOVIŞTE[1]

Introducere

În cele ce urmează vom încerca să rezolvăm câteva probleme de geometrie folosindu-ne de vectori. Problemele alese au o idee comună de rezolvare, care credem că va fi utilă cititorilor.

O lemă utilă

Reamintim un rezultat binecunoscut, şi pe care îl vom folosi destul de des în cele ce urmează: două triunghiuri ABC şi $A_1B_1C_1$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.

Probleme rezolvate

1. Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon circumscriptibil şi $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}, B_n$ punctele de contact ale cercului înscris cu laturile $A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nA_1$ respectiv. Dacă O este centrul cercului, cu cât este egal vectorul

$$\overrightarrow{v} = A_1A_2 \cdot \overrightarrow{OB_1} + A_2A_3 \cdot \overrightarrow{OB_2} + \ldots + A_nA_1 \cdot \overrightarrow{OB_n}\ ?$$

Soluţie: Să observăm că vectorii $A_1A_2 \cdot \overrightarrow{OB_1}$ şi $OB_1 \cdot \overrightarrow{A_1A_2}$ sunt perpendiculari şi au acelaşi modul. Dacă $\overrightarrow{v'} = OB_1 \cdot \overrightarrow{A_1A_2} + OB_2 \cdot \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + OB_n \cdot \overrightarrow{A_nA_1}$ atunci este clar că $\overrightarrow{v'}$ se obţine rotind $\overrightarrow{v}$ cu un unghi de 90°. Dar cum $OB_1 = OB_2 = \ldots = OB_n = r$ avem $\overrightarrow{v'} = r\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_nA_1}\right) = \overrightarrow{0}$ deci $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

2. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC. Arătaţi că

$$\frac{BC}{HA} \cdot \overrightarrow{HA} + \frac{CA}{HB} \cdot \overrightarrow{HB} + \frac{AB}{HC} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}.$$

Dan Şt. Marinescu, V. Cornea, V. Pop, O.N.M., 2007, enunţ parţial

Soluţie: Vectorii $\frac{BC}{HA} \cdot \overrightarrow{HA}$ şi $\overrightarrow{BC}$ sunt perpendiculari şi au acelaşi modul. Dacă $\overrightarrow{v} = \frac{BC}{HA} \cdot \overrightarrow{HA} + \frac{CA}{HB} \cdot \overrightarrow{HB} + \frac{AB}{HC} \cdot \overrightarrow{HC}$ atunci rotind acest vector cu 90° el va deveni $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ deci $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

[1] elev la Colegiul Naţional ,,C-tin Carabella”, Târgovişte, e-mail: mndclaudiu@gmail.com

3. Fie D, E, F puncte în exteriorul unui triunghi ABC astfel încât $\triangle ABD \sim \triangle BCE \sim \triangle CAF$. Arătaţi că triunghiurile ABC şi DEF au acelaşi centru de greutate.

Soluţie: Scriind rapoartele de asemănare şi prelucrându-le ajungem la $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{BE}{BC} = \dfrac{CF}{CA} = k$. Tot din asemănări avem şi $\widehat{DAB} = \widehat{EBC} = \widehat{FCA} = \phi$. Acum, considerăm vectorul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ pe care îl rotim cu unghiul ϕ şi care va deveni $\overrightarrow{v'} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$. Deci $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ceea ce conform lemei înseamnă exact cerinţa problemei.

4. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră 6 puncte dispuse astfel: A_1, A_2 pe BC; B_1, B_2 pe CA şi C_1, C_2 pe AB. Aceste 6 puncte sunt vârfurile unui hexagon convex $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ cu toate laturile egale. Demonstraţi că $A_1B_2,\ B_1C_2,\ C_1A_2$ sunt concurente.

Bogdan Enescu, O. I. M. 2005

Soluţie: Să notăm $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{B_2C_1}$, $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{C_1C_2}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{C_2A_1}$, $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{A_2B_1}$, $\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{B_1B_2}$. Se observă imediat că

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'} = \overrightarrow{0}.$$

Dar vectorii $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$, $\overrightarrow{w'}$ au lungimi egale şi formează între ei unghiuri de $60°$, deci $\overrightarrow{u'} + \overrightarrow{v'} + \overrightarrow{w'} = \overrightarrow{0}$ ceea ce conduce la $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ sau $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{w}$. Dar suma a doi vectori cu aceeaşi lungime este egală cu un vector cu aceeaşi lungime, deci atunci unghiul dintre ei este de $120°$. Deci vectorii $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ se obţin rotind pe unul dintre ei cu unghiuri de $120°$ respectiv $240°$ (ca şi vectorii $\overrightarrow{u'}$, $\overrightarrow{v'}$, $\overrightarrow{w'}$). Deci triunghiurile $A_1A_2B_1$, $B_1B_2C_1$, $C_1C_2A_1$ se obţin rotind pe unul dintre ele cu aceleaşi unghiuri anterior menţionate. Aşadar vom avea $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1A_1$. Mai rămâne de observat că dreptele A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 sunt mediatoarele laturilor triunghiului $A_1B_1C_1$, deci sunt concurente.

5. Fie ABC un triunghi cu centrul de greutate G şi cu proprietatea că $\sphericalangle GAB \equiv \sphericalangle GBC \equiv \sphericalangle GCA$. Demonstraţi ca triunghiul este echilateral.

Claudiu Mîndrilă

Soluţie: Fie $x,\ y,\ z \in (0,\ \infty)$ pentru care $GA = x \cdot AB$, $GB = y \cdot BC$, $GC = z \cdot CA$. Considerând ϕ valoarea comună a unghiurilor egale din enunţ şi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, rotind acest vector cu unghiul ϕ el va deveni $\overrightarrow{v'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} + z\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$, ceea ce conduce la $x = y = z$. De aici deducem $\dfrac{m_a}{c} = \dfrac{m_b}{a} = \dfrac{m_c}{b} = k \Longrightarrow k^2 = \dfrac{m_a^2}{c^2} = \dfrac{m_b^2}{a^2} = \dfrac{m_c^2}{b^2} = \dfrac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \dfrac{3}{4}$ şi mai departe scriind relaţia medianei obţinem uşor $2b^2 = a^2 + c^2$, $2c^2 = a^2 + b^2$,

$2a^2 = b^2 + c^2$, relaţii care scăzute două câte două conduc la $a^2 = b^2 = c^2$, adică la $a = b = c$.

Aplicaţii

1. Fie triunghiul ABC, I centrul cercului înscris în acest triunghi şi M, N, P punctele de tangenţă ale acestui cerc cu laturile triunghiului ABC.
Dacă $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{0}$ atunci triunghiul ABC este echilateral.

Dorinel Anca, Minus 1/2010

2. Fie ABC un triunghi astfel încât măsurile unghiurilor A, B, C să fie mai mici decât $120°$ şi M un punct din interiorul său. Fie $A_1 \in (AM)$, $B_1 \in (BM)$, $C_1 \in (CM)$ astfel încât $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Să se arate că $\triangle ABC$ şi $\triangle A_1B_1C_1$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $m\left(\widehat{BMC}\right) = m\left(\widehat{CMA}\right) = m\left(\widehat{AMB}\right) = 120°$.

Dan Ştefan Marinescu, Viorel Cornea, concursul ,,Gh. Lazăr", 2005

3. Demonstraţi că dacă înălţimile AD, BE, CF ale $\triangle ABC$ satisfac

$$4\overrightarrow{AD} + 19\overrightarrow{BE} + 25\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0},$$

atunci $\triangle ABC$ are un unghi cu măsura de $60°$.

Cristinel Mortici, concursul ,,Chindia", 2010

4. Fie un triunghi ABC şi $P \in Int\,(ABC)$ astfel încât $m\left(\widehat{PAB}\right) = m\left(\widehat{PBC}\right) = m\left(\widehat{PCA}\right)$. Arătaţi că dacă

$$AB \cdot \overrightarrow{AP} + BC \cdot \overrightarrow{BP} + CA \cdot \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{0},$$

atunci $\triangle ABC$ este echilateral.

Claudiu Mîndrilă

BIBLIOGRAFIE

[1] **D. Şerbănescu** – *O demonstraţie a unei teoreme a lui Newton*, Gazeta Matematică nr. 10/2003

[2] **M. Bălună, R. Gologan, D. Schwarz** – *A 46-a Olimpiadă Internaţională de Matematică*, Gazeta Matematică nr. 9/2005