CRITERII DE DIVIZIBILITATE

ABSTRACT. Materialul conţine câteva reguli generale de divizibilitate, altele decàt cele din manual.

Lecţia se adresează clasei a VI-a

Autor: Ion Cicu, Şcoala nr.96, Bucureşti

În general, pentru a stabili dacă un număr natural a divide numărul natural N trebuie să împărţim N la a. Dacă restul împărţirii este 0 atunci a divide pe N.

În unele cazuri putem găsi reguli care să ne permită să decidem mai uşor dacă a divide N. Aceste reguli se vor numi criterii de divizibilitate.

Aşadar, prin criteriu de divizibilitate înţelegem o regulă, relativ simplă, prin care să putem decide dacă un număr natural a divide numărul natural N.

Exemple de astfel de reguli sunt criteriile de divizibilitate cu 2, cu 5 sau cu 10.

Criteriu 1. Un număr natural N se divide cu 2, cu 5 sau cu 10 dacă şi numai dacă numărul format din cifra unităţilor se divide cu 2, cu 5 sau cu 10.

Un alt criteriu cunoscut este cel referitor la divizibilitatea cu 3 sau cu 9

Criteriu 2. Un număr natural N se divide cu 3 sau cu 9 dacă suma cifrelor lui N dă un număr divizibil cu 3 sau cu 9.

Pentru ceea ce urmează este bine să ne amintim scrierea unui număr natural în baza 10. Avem

$$N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

unde $a_k,\ a_{k-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0 \in \{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9\}$

Criteriu 3. Un număr natural N se divide cu 2^2 (4), cu 5^2 (25) sau cu 10^2 (100) dacă numărul format din ultimele două cifre ale lui N se divid cu 2^2 (4), cu 5^2 (25) sau cu 10^2 (100).

Justificare. Folosind scrierea în baza 10 a unui număr natural avem

$$N = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

observăm că toţi termenii de la $a_k \cdot 10^k$ până la $a_2 \cdot 10^2$ se divid cu 4, cu 25 sau cu 100.

Atunci este evident că numărul N se va divide cu 4, cu 25 sau cu 100 dacă
$$a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = \overline{a_1 a_0}$$
se divide cu 4, cu 25 sau cu 100.

Acest criteriu se poate generaliza astfel

Criteriu 4. Un număr natural N se divide cu 2^p, cu 5^p sau cu 10^p dacă numărul format din ultimele p cifre ale lui N se divid cu 2^p, cu 5^p sau cu 10^p .

În cele ce urmează vom prezenta câteva criterii de divizibilitate fără demonstraţie. Le vom însoţi însă de exemple.

Criteriu 5. (divizibilitate cu 7) Se scrie numărul N în baza 10. Se înlocuieşte baza 10 cu 3 şi se fac calculele. Dacă numărul obţinut se divide cu 7, atunci numărul N se divide cu 7.

Exemplu 1. Stabiliţi dacă numărul 51744 se divide cu 7.

Soluţie. Avem
$$51744 = 5 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4$$
Acum, înlocuim baza 10 cu 3 şi facem calculele.
$$5 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^1 + 4 = 511$$
Deoarece 511 se divide cu 7 ($7 \cdot 73 = 511$) înseamnă că 51744 se divide cu 7.

Criteriu 6. (divizibilitate cu 7, variantă) Prima cifră din stânga a numărului N se înmulţeşte cu 3. Rezultatul obţinut se împarte la 7 şi se păstrează restul. Restul obţinut se adună cu cifra imediat următoare şi se înmulţeşte din nou cu 3. Numărul obţinut se împarte la 7 şi se păstrează restul. Procedăm la fel până ajungem la ultima cifră. La acest moment nu mai înmulţim cu 3. Dacă numărul obţinut se divide cu 7, atunci N se divide cu 7.

Exemplu 2. Stabiliţi dacă numărul 517496 se divide cu 7.

Soluţie. Avem succesiv
$$\begin{gathered}
5 \cdot 3 = 15 \\
15 = 7 \cdot 2 + 1 \\
1 + 1 = 2 \\
2 \cdot 3 = 6 \\
6 = 7 \cdot 0 + 6 \\
6 + 7 = 13 \\
13 \cdot 3 = 39 \\
39 = 7 \cdot 5 + 4 \\
4 + 4 = 8 \\
8 \cdot 3 = 24 \\
24 = 7 \cdot 3 + 3 \\
3 + 9 = 12 \\
12 \cdot 3 = 36 \\
36 = 7 \cdot 5 + 1 \\
1 + 6 = 7
\end{gathered}$$

Acum, deoarece 7 se divide cu 7 rezultă că numărul 517496 se divide cu 7.

Criteriu 7. (divizibilitate cu 7, 11 sau 13) Numărul N se împarte, de la dreapta spre stânga, în grupe de câte trei cifre (ultima grupă poate avea mai puţin de 3 cifre). Dacă diferenţa dintre sumele grupelor luate din doi în doi dau un număr divizibil cu 7, 11 sau 13, atunci numărul N se divide cu 7, 11 sau 13.

Exemplu 3. Stabiliţi dacă numărul $N = 2420066285$ se divide cu 7, cu 11 sau cu 13.

Soluţie. Numărul descompus în grupe de câte trei cifre, de la dreapta spre stânga arată aşa

$$2420066285$$

Sumele grupelor luate din doi în doi sunt

$$2 + 66 = 68$$

$$420 + 285 = 705$$

Diferenţa acestor sume este

$$705 - 68 = 637$$

Acum, deoarece 637 se divide cu 7 ($637 = 7 \cdot 91$) şi cu 13 ($637 = 13 \cdot 49$) şi nu se divide cu 11 ($637 = 11 \cdot 627 + 10$) înseamnă că numărul N se divide cu 7 şi cu 13, dar nu se divide cu 11.

Criteriu 8. (divizibilitate cu 3, cu 7 sau cu 19) Din numărul N se elimină ultimele două cifre. Numărul format din aceste cifre se înmulţeşte cu 4 şi se adună la numărul rămas după eliminare. *(Putem repeta procedeul până obţinem un număr mai mic.)* Dacă numărul astfel obţinut se divide cu 3, cu 7 sau cu 19, atunci numărul N se divide cu 3, cu 7 sau cu 19.

Exemplu 4. Stabiliţi dacă numărul $N = 636538$ se divide cu 7 sau cu 19.

Soluţie. Numărul obţinut după eliminarea ultimelor două cifre este 6365, iar numărul format de ultimele două cifre este 38. Avem

$$6365 + 38 \cdot 4 = 6517$$

Trebuie văzut dacă numărul 6517 se divide cu 7 sau cu 19. Procedăm ca mai sus.

$$65 + 17 \cdot 4 = 133$$

Deoarece

$$133 = 7 \cdot 19$$

înseamnă că 133 se divide şi cu 7 şi cu 19. Atunci 6517 se divide şi cu 7 şi cu 19, iar de aici rezultă că N se divide şi cu 7 şi cu 19.

Încheiem expunerea cu un criteriu general de divizibilitate.

Criteriu 9. (Criteriul general de divizibilitate) Numărul natural N se divide cu numărul natural a dacă suma dintre cifrele sale înmulţite cu restul împărţirii la a a puterii lui 10 asociată cifrei este un număr divizibil cu a.

Nu vom da demonstraţia acestui criteriu, deşi este foarte simplă. Vom prezenta un exemplu.

Exemplu 5. Stabiliţi dacă numărul 85462 este divizibil cu 247.

Soluţie. Avem $85462 = 8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Acum
$10^4 = 10000 = 247 \cdot 40 + 120$
$10^3 = 1000 = 247 \cdot 4 + 12$
$10^2 = 100 = 247 \cdot 0 + 100$
$10^1 = 10 = 247 \cdot 0 + 10$
$10^0 = 1 = 247 \cdot 0 + 1$.

Calculăm acum $8 \cdot 120 + 5 \cdot 12 + 4 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 1482$.

Deoarece 1482 se divide cu 247 $(1482 = 247 \cdot 6)$, atunci şi 85462 se divide cu 247.