

NUMERE PRIME. NUMERE COMPUSE

ABSTRACT. Articolul prezintă câteva rezultate legate de numere prime (forma numerelor prime, numărul divizorilor naturali, numerele prime și pătratele perfecte sau cuburile perfecte) precum și exemple de probleme reprezentative cu numere prime.

Lecția se adresează clasei a V-a.

Data: 20 decembrie 2010.

Autor: Ion Cicu, Profesor, Școala nr. 96, București.

Numerele prime reprezintă o clasă specială în mulțimea numerelor naturale.

Definiție: Numim număr prim orice număr natural $p \geq 2$ care are exact doi divizori, pe 1 și pe el însuși.

Orice număr natural diferit de 0 și 1 care nu este număr prim se numește număr compus.

Observație: 2 este singurul număr prim care este și număr par. Toate celelalte numere prime sunt impare.

Justificare: Orice număr par mai mare decât 2 se divide evident cu 2 și deci nu poate fi număr prim (are și alți divizori în afară de 1 și el însuși).

O modalitate de a găsi numerele prime mai mici decât un număr dat n o reprezintă "ciurul lui Eratostene". Pentru aceasta scriem în ordine crescătoare numerele naturale de la 2 până la n și apoi eliminăm pe rând multiplii lui 2, multiplii lui 3, multiplii următorului număr pe care nu l-am eliminat încă și așa mai departe. Ne oprim în momentul în care următorul număr neeliminat, să-l numim p , verifică relația $p^2 \geq n$. Numerele rămase în șir sunt numere prime.

Câte numere prime există?

Problemă numărul de numere prime a fost rezolvată încă din antichitate de către Euclid.

Teoremă: Există o infinitate de numere prime.

Demonstrație: Să presupunem că numărul de numere prime este finit și notăm $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ mulțimea tuturor numerelor prime. Construim acum numărul $r = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Evident că numărul r nu se divide cu niciunul dintre elementele mulțimii P . Asta înseamnă că numărul r este număr prim și nu face parte din mulțimea P . Putem introduce numărul r în mulțimea P și apoi să repetăm procedeul. Evident acest procedeu se poate repeta la nesfârșit. În concluzie mulțimea numerelor prime nu este finită.

Descompunerea în factori primi

Cel mai important rezultat referitor la numere prime îl reprezintă teorema fundamentală a aritmeticii.

Teoremă: Orice număr compus se scrie ca produs de numere prime nu toate diferite. Scrierea este unică dacă nu luăm în calcul ordinea factorilor.

Demonstrație: Fie N un număr compus. Fiind număr compus N are un divizor număr prim; să-l notăm p_1 . Atunci putem scrie

$$N = p_1 \cdot N_1, \text{ cu } N_1 < N$$

Acum, pentru N_1 putem avea două situații: să fie număr prim sau să fie număr compus.

Dacă este număr prim problema este încheiată, numărul N s-a scris ca produs de două numere prime.

Dacă N_1 este număr compus, atunci el are un divizor număr prim; să-l notăm p_2 . Vom putea scrie

$$N_1 = p_2 \cdot N_2, \text{ cu } N_2 < N_1$$

și atunci N se va scrie

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot N_2, \text{ cu } N_2 < N_1 < N$$

Considerațiile făcute despre N_1 le putem face acum despre N_2 .

Procedând astfel vom ajunge ca în scrierea lui N ca produs să apară numai factori primi. Procesul se va termina la un moment dat având în vedere că numerele N_i devin din ce în ce mai mici.

Deoarece o parte dintre factori pot fi egali, pentru orice număr compus, N putem scrie

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}. \quad (1)$$

unde p_1, p_2, \dots, p_k sunt factorii primi ai produsului, iar n_1, n_2, \dots, n_k ne arată de câte ori se repetă fiecare factor.

Scrierea (1) se numește "descompunerea unui număr natural în produs de puteri de numere prime". Uneori spunem mai simplu "descompunerea în factori a numărului N ".

Exemplu: Să luăm numărul 24.

Avem

$$24 = 2 \cdot 12$$

Deoarece $12 = 2 \cdot 6$ putem scrie

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 6$$

Acum, pentru că $6 = 2 \cdot 3$ vom scrie

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

sau

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

Calcululele de mai sus pot fi așezate astfel: în dreapta numerele prime care divid numerele scrise în dreapta; în dreapta se începe cu numărul dat apoi se scriu rezultatele împărțirii la factorul prim scris în stânga.

ARITMETICĂ

3

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

și atunci $24 = 2^3 \cdot 3$.

Faptul că un număr natural se scrie ca produs de puteri de numere prime ne permite să aflăm numărul divizorilor aceluși număr.

Să presupunem că pentru un număr natural N avem $N = p_1^{n_1}$. Atunci divizorii lui N sunt: $1, p_1, p_1^2, \dots, p_1^{n_1}$. Observăm că numărul divizorilor este $n_1 + 1$.

Dacă $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$, pentru a scrie toți divizorii vom folosi tabelul de mai jos. În acest tabel, pe prima linie sunt scriși toți divizorii lui N care conțin factorul prim p_2 , iar pe prima coloană toți divizorii care conțin factorul p_1 . Toți ceilalți divizori se obțin prin înmulțirea unui element din prima coloană cu un element de pe prima linie. Numărul de divizori este egal cu numărul căsuțelor din dreptunghi, iar acesta se obține înmulțind numărul căsuțelor de pe prima coloană cu numărul căsuțelor de pe prima linie.

1	p_2	p_2^2	p_2^3		$p_2^{n_2}$
p_1	$p_1 \cdot p_2$	$p_1 \cdot p_2^2$	$p_1 \cdot p_2^3$		$p_1 \cdot p_2^{n_2}$
$p_1^{n_1}$	$p_1^{n_1} \cdot p_2$	$p_1^{n_1} \cdot p_2^2$	$p_1^{n_1} \cdot p_2^3$		$p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$

Cum pe prima coloană avem $n_1 + 1$ căsuțe, iar pe prima linie $n_2 + 1$ căsuțe tragem concluzia că numărul divizorilor lui $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2}$ este

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1).$$

În general, putem formula următoarea

Teoremă: Numărul divizorilor naturali ai numărului

$$N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$$

este egal cu

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_k + 1)$$

Alte teoreme despre numere prime

Teoremă: Orice număr prim $p \geq 5$ are forma $6k + 1$ sau $6k + 5$.

Demonstrație: Se știe că orice număr natural are una din formele $6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4$ sau $6k + 5$. Acum, este evident că $6k, 6k + 2$ și $6k + 4$ se divid cu 2, deci nu sunt numere prime. Deasemenea, $6k + 3$ se divide cu 3. Cum pentru $6k + 1$ și $6k + 5$ nu putem preciza nici un divizor propriu rămâne că acestea sunt formele posibile pentru numerele prime.

Atenție! Din teorema anterioară nu putem trage concluzia că un număr de forma $6k + 1$ sau $6k + 5$ este număr prim. Ceea ce putem afirma este că un număr despre care știi deja că este prim are una din aceste forme.

Observație: Analog cu teorema de mai sus putem afirma că "Orice număr prim $p \geq 3$ are forma $4k + 1$ sau $4k + 3$ ".

Teoremă: Dacă un număr prim p divide un pătrat perfect N , atunci p^2 îl divide pe N .

Demonstrație: Dacă N este pătrat perfect, atunci $N = A^2$. Fie $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ descompunerea în factori a lui A . Atunci $N = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_k^2$.

Din ipoteză p divide N , deci p este unul dintre factorii p_1, p_2, \dots, p_k . Cum oricare p_i apare la puterea a doua, rezultă că p^2 divide pe N .

La fel putem arăta că

Teoremă: Dacă un număr prim p divide un cub perfect N , atunci p^3 îl divide pe N .

Probleme cu numere prime

Problema 1: Găsiți numerele prime a, b, c știind că $a + 4b + 8c = 66$.

Soluție: Rezolvarea unei astfel de probleme se bazează pe paritatea numerelor și pe faptul că suma a două numere de aceeași paritate este un număr par, iar suma a două numere de parități diferite este un număr impar. În cazul nostru, $4b$ și $8c$ sunt numere pare. Deasemenea, 66 este un număr par. Rezultă că a trebuie să fie număr par. Cum a este număr prim obținem $a = 2$. Atunci ecuația devine $2 + 4b + 8c = 66$ sau $4b + 8c = 64$. Împărțind prin 4 rezultă $b + 2c = 16$. Acum, $2c$ este număr par, 16 este număr par, rezultă cu necesitate b este număr par. Cum b este număr prim, avem $b = 2$. Înlocuind în ultima relație obținem $c = 7$.

Problema 2: Să se determine n pentru care toate numerele $n, n + 4, n + 6, n + 10, n + 12, n + 16, n + 22$ sunt numere prime.

Soluție: Ideea de rezolvare este următoarea: să găsim, prin încercări, o soluție și apoi să arătăm că este unică.

În cazul nostru observăm că pentru $n = 7$ obținem numerele: 7, 11, 13, 17, 19, 23 și 29, toate numere prime.

Să arătăm acum că $n = 7$ este singura soluție.

Orice număr natural, în raport cu 7, are una din formele: $7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6$.

Acum, cu excepția lui 7 nici un alt număr de forma $7k$ nu este număr prim, deci $n \neq 7k$.

Pentru $n = 7k + 1$ $n + 6 = 7k + 7$, deci nu e număr prim;

ARITMETICĂ

5

Pentru $n = 7k + 2$ $n + 12 = 7k + 14$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 3$ $n + 4 = 7k + 7$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 4$ $n + 10 = 7k + 14$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 5$ $n + 16 = 7k + 21$, deci nu e număr prim;

Pentru $n = 7k + 6$ $n + 22 = 7k + 28$, deci nu e număr prim.

În concluzie, singura soluție este $n = 7$.